# Murtolukujen muuttaminen desimaaliluvuiksi toiminnallista matematiikkaa hyödyntämällä

Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Pro gradu -tutkielma
Matematiikan aineenopettajan opinnot
Heidi Venho
Kesäkuu 2018
Ohjaaja: Juha Oikkonen

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

| Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty | Laitos — Institution — Department |
|---|---|
| Matemaattis-luonnontieteellinen | Matematiikan ja tilastotieteen laitos |

Tekijä — Författare — Author

Heidi Venho

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Murtolukujen muuttaminen desimaaliluvuiksi toiminnallista matematiikkaa hyödyntämällä

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

| Työn laji — Arbetets art — Level | Aika — Datum — Month and year | Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages |
|---|---|---|
| Pro gradu -tutkielma | Kesäkuu 2018 | 47 sivua + 10 liitesivua |

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Pro gradu tutkielmani tavoitteena oli kehittää toiminnallisen matematiikan opetusmateriaali sellaiseen aiheeseen, johon ei vielä ole kunnollista materiaalia. Helsingin yliopistolla toimivan LUMA-keskuksen tiedekasvatuskeskuksen tiedeluokka Summamutikan koordinaattorin Jenni Räsäsen avustuksella aihealueeksi valikoitui murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys. Tutkielmani päätavoite on esitellä kehittämäni opetusmenetelmää aihealueeseen. Perustelen myös kehittämäni opetusmenetelmän toimivuutta tekemäni tutkimuksen perusteella kahdelle Keravan Kurkelan koulun 7.luokan oppilaiden, sekä kolmen koulun opettajan palautteiden pohjalta. Ennen tätä käyn kuitenkin läpi kappaleessa kaksi opetussuunnitelman vaatimukset murtolukujen, desimaalilukujen, sekä murtolukujen ja desimaalilukujen välisen yhteyteen. Lisäksi valitsin alakoulun 3.luokasta yläkoulun 7.luokkaan saakka yksittäisiä oppikirjoja, joiden tapaa opettaa aihetta avaan hieman enemmän. Tässä kappaleessa esittelen myös aiemmin kehitettyjä toiminnallisia menetelmiä murtolukujen ja desimaalilukujen väliseen yhteyteen. Kerron myös Milla Ristiluoman kehittämästä vastaavantyylisestä menetelmästä murtolukujen opetukseen.

Kolmannessa kappaleessa perustelen toiminnallisen matematiikan hyödyllisyyttä matematiikan opetuksessa erilaisten oppimiskäsitysten ja oppimismenetelmien nojalla. Esittelen myös Unkarilaista Varga-Nemenyi menetelmää, joka pohjautuu hyvin pitkälle toiminallisen matematiikan menetelmiin. Tämän lisäksi olen koostanut kappaleeseen osion, jossa pohditaan murtolukujen ja desimaalilukujen oppimisvaikeuksia siitäkin huolimatta, että murtoluvut ovat olleet vuosisatoja tarvittu väline.

Neljännessä kappaleessa esittelen tarkemmin kehittämäni opetusmenetelmän ja osoitan menetelmän toimivuutta konkreettisten esimerkkien avulla. Viidennessä kappaleessa käyn puolestaan läpi opetusmenetelmäni ympärille tekemäni oppituntisuunnitelman, sen testaamisen koululla sekä saamaani palautetta opetusmenetelmästäni. Reflektoin viidennessä kappaleessa myös omia tuntemuksiani saamaani palautteeseen verraten, sekä itse oppitunnin sujumista. Tämän lisäksi käyn läpi kehitysideoita opetusmenetelmästäni.

Liitteinä löytyy käyttämäni oppituntisuunnitelma, palauttelomakkeet oppilaille ja opettajalle, sekä ohjeet opetusmenetelmäni ohjelmointiversioon.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Murtoluvut, desimaaliluvut, murtolukujen ja desimaalilukujen yhteys, toiminnallinen matematiikka

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

# Sisältö

# 1 Murtoluvut, desimaaliluvut, sekä murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys opetussuunnitelmassa ja oppimateriaaleissa

Murtoluvut ja desimaaliluvut ovat koulumatematiikassa aihealueina aina alakoulusta lukioon asti. Aihe on tärkeä osata ja hallita, sillä aiheet liittyvät läheisesti arkielämässä tarvittavaan matematiikkaan. Murtoluvut ja desimaaliluvut liittyvät oleellisesti myös prosenttilaskentaan, mikä niin ikään on arkielämän matematiikkaa.

Tässä kappaleessa esittelen, miten murtolukuja, desimaalilukuja ja niiden välistä yhteyttä opetetaan kahdessa eri yläkoulun oppikirjassa, alakoulun Tuhattaituri kirjasarjassa, sekä opetussuunnitelman[7] vaatimuksia aiheiden opetukseen. Oppikirjoiksi valitsin Sanoma Pro Oy:n 9.-10. painoksen kirjasta Kuutio 7 [6], Sanoma Pro Oy:n 1.painoksen kirjasta Pointti 1 [5], sekä Otavan Tuhattaituri kirjasarjan vanhan opetussuunnitelman mukaisia kirjoja, että uuden vuoden 2016 opetussuunnitelman mukaisia kirjoja. [1], [2], [3], [4].

Lopuksi teen myös pohdintaa, minkä vuoksi murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys tuntuu haastavalta yläkoululaisille ja miten aihetta mahdollisesti mielestäni tulisi opettaa.

## 1.1 Opetussuunnitelman vaatimukset

### 1.1.1 Alakoulussa

Vuoden 2014 opetussuunnitelmassa [7] kohdassa "Matematiikan opetuksen tavoitteet vuosiluokilla 3-6"on mainittu seuraavat asiat:

- T2 Ohjata oppilasta havaitsemaan yhteyksiä oppimiensa asioiden välillä (Työskentelyn taidot)
- T7 Ohjata oppilasta käyttämään ja ymmärtämään matemaattisia käsitteitä ja merkintöjä (Käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet)
- T9 Tukea oppilasta lukukäsitteen kehittymisessä positiivisiin rationaalilukuihin ja negatiivisiin kokonaislukuihin (Käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet)
- T10 Opastaa oppilasta saavuttamaan sujuva laskutaito päässä ja kirjallisesti hyödyntäen laskutoimitusten ominaisuuksia (Käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet)

Tavoitteet liittyvät oleellisesti myös matematiikan keskeisiin sisältöalueisiin vuosiluokilla 3-6. Kaikkiin yllä mainittuihin opetuksen tavoitteisiin liittyy myös murtoluvun ja desimaaliluvun käsitteet, sekä laskutoimitukset. Matematiikan keskeisten sisältöalueiden vuosiluokilla 3-6 kohdassa "S2 Luvut ja laskutoimitukset"mainitaan erikseen:

- "Hyödynnetään laskutoimitusten ominaisuuksia ja niiden välisiä yhteyksiä. Oppilaita ohjataan pyöristämään lukuja ja laskemaan likiarvoilla siten, että he oppivat arvioimaan tuloksen suurusluokan..."
- "Opitaan murtoluvun käsite ja harjoitellaan murtolukujen peruslaskutoimituksia eri tilanteissa"
- "Perehdytään desimaalilukuihin osana kymmenjärjestelmää ja harjoitellaan peruslaskutoimituksia desimaaliluvuilla"
- "Hyödynnetään murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin välisiä yhteyksiä."

Toisin sanoen jo alakoulun matematiikan vuosiluokilla 3-6 oletetaan opetettavan murtolukujen ja desimaalilukujen välistä yhteyttä. Aihealueet kuuluvat myös oleellisesti matematiikan tavoitteisiin.

### 1.1.2 Yläkoulussa

Vuoden 2014 opetussuunnitelmassa [7] mainitaan matematiikan kohdalla oppiaineen tehtävänä olevan kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Toiminnallinen matematiikka sopii yleisesti tähän tehtävään hyvin, toiminnallisesta matematiikasta kerron lisää myöhemmin työssäni. Opetussuunnitelmassa mainitaan myös jälleen opetuksessa syvennettävän matemaattisten käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä.

Matematiikan opetuksen tavoitteissa vuosiluokilla 7-9 mainitaan seuraavat asiat:

T3 Ohjata oppilasta havaitsemaan ja ymmärtämään oppimiensa asioiden välisiä yhteyksiä (työskentelyn taidot)

T5 Tukea oppilasta loogista ja luovaa ajattelua vaativien matemaattisten tehtävien ratkaisemisessa ja siinä tarvittavien taitojen kehittämisessä (työskentelyn taidot)

T10 Ohjata oppilasta vahvistamaan päättely- ja päässälaskutaitoa ja kannustaa oppilasta käyttämään laskutaitoaan eri tilanteissa (käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet)

Lisäksi matematiikan tavoitteisiin liittyvissä keskeisissä sisältöalueissa vuosiluokilla 7-9 mainitaan seuraavat asiat:

- **S1 Ajattelun taidot ja menetelmät:** "Harjoitellaan loogista ajattelua vaativia toimintoja, kuten sääntöjen ja riippuvaisuuksien etsimistä ja esittämistä täsmällisesti... Vahvistetaan oppilaiden päättelykykyä ja taitoa perustella."
- **S2 Luvut ja laskutoimitukset:** "...Vahvistetaan laskutaitoa murtoluvuilla ja opitaan murtoluvun kertominen ja jakaminen murtoluvulla... Syvennetään desimaalilukujen laskutoimitusten osaamista. Vahvistetaan ymmärrystä tarkan arvon ja likiarvon erosta sekä pyöristämisestä."

Matematiikan oppimisympäristöihin ja työtapoihin liittyvissä tavoitteissa puolestaan mainitaan tavoitteeksi käyttää vaihtelevia työtapoja. Oppimispelit ovat yksi motivoiva työtapa.

Opetussuunnitelmassa niin alakoulun kuin yläkoulun puolella tuetaan murtolukujen ja desimaalilukujen välisten yhteyksien ymmärtämiseen. Kuitenkin ainakin omakohtainen kokemukseni on, etteivät oppilaat oikein ymmärrä näiden asioiden välisiä yhteyksiä. Opetussuunnitelma kuitenkin tukee vahvasti gradutyöni aiheena olevaa oppimispeliä kyseisiin aiheisiin liittyen.

## 1.2 Murtoluvut, desimaaliluvut, sekä murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys alakoulussa

Kuten opetussuunnitelmasta käy ilmi, murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys on alakoulun matematiikkaan kuuluva osa-alue. Omakohtainen kokemukseni kutenkin on, etteivät oppilaat tahdo yläkoulussa ymmärtää asioiden välistä yhteyttä puhumattakaan siitä, miten ratkaista murtoluku desimaaliluvuksi.

Tässä osiossa tutkin Otavan "Tuhattaituri"kirjasarjan sisältöjä murtolukujen ja desimaalilukujen osalta, sekä tutustun tarkemmin kirjasarjan lähestymistapoihin murtolukuihin, desimaalilukuihin ja murtoluvun ja desimaaliluvun väliseen yhteyteen. Kirjasarjassa murtoluvut tulevat ensimmäisen kerran oppilaalle vastaan kolmannen luokan aikana, desimaaliluvut neljännellä luokalla ja murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys viidennellä, sekä kuudennella luokalla.

Tekstiä kirjoittaessani uuden vuoden 2016 mukaisia Tuhattaituri kirjoja on julkaistu vasta Tuhattaituri 5a kirjaan asti, joten katsauksessa on osittain mukana myös vanhan opetussuunnitelman mukaisia kirjoja, eli kirjat Tuhattaituri 5b ja Tuhattaituri 6b.[3], [4]

### 1.2.1 Tuhattaituri 3b

Murtoluvut tulevat ensimmäisen kerran vastaan kirjassa Tuhattaituri 3b. [1] Kirja lähtee liikkeelle jakolasku osiosta, jonka jälkeen aloitetaan murtoluvut. Murtoluvut osio on jaettu kymmeneen osaan:

- Kokonaisen jakaminen yhtä suuriin osiin
- Murtoluku
- Yksi kokonainen
- Suuruusvertailua
- Harjoittelen
- Murtolukujen yhteenlasku
- Murtolukujen vähennyslasku
- Harjoittelen

- Toimintatunti
- Tähtipysäkki

Osiota katsastaessa näkee heti, että kyseinen kirja lähestyy murtolukua hyvin toiminnallisella ja visuaalisella otteella murtolukukakkujen ja erilaisten "osiksi jako-tehtävien kautta. Tehtäviä lähestytään monipuolisin tavoin, mukana on läpi murtolukuosion niin murtolukukakut, loogiset päättelytehtävä, erilaiset osien värittämistehtävät ja muita kuvitettuja tehtäviä. Kirja ja osio näyttävätkin todella miellyttäviltä ja pidän kirjan tavasta lähestyä murtolukuaihetta hyvin arkipäiväisin ja havainnollistavin esimerkein.

### 1.2.2 Tuhattaituri 4b

Tuhattaituri 4b [2] kirja puolestaan jatkaa 1.jaksossa edelleen murtolukujen parissa ja 2.jaksossa vastaan tulee desimaaliluvut. Desimaalilukuvut osio on jaettu 12:sta osaan:

- Desimaaliluku
- Desimaaliluvun kymmenesosat
- Desimaalilukujen yhteenlasku
- Desimaalilukujen vähennyslasku
- Harjoittelen
- Desimaaliluvun sadasosat
- Suuruusvertailua
- Desimaalilukujen yhteenlasku allekkain
- Desimaalilukujen vähennyslasku allekkain
- Harjoittelen
- Toimintatunti
- Tähtipysäkki

Osio aloitetaan desimaali käsitteen esittelyllä ja desimaalilukujen oikeaoppisella lukemistavalla. Kappaleen tehtävät harjoittavat myös monipuolisesti desimaalilukuun liittyviä erilaisia käsitteitä, kuten desimaalipilkku, kokonaisosa, desimaaliosa, kymmenet, ykköset, kymmeneosat, jne.

Kuitenkin desimaaliluvut osion toisessa luvussa tulee vastaan ensimmäisen kerran murtoluvun ja desimaaliluvun välinen yhteys kymmenesosista puhuttaessa. Kirjan teoriaosassa esitetään murtolukuja desimaaliluku lukusuoran avulla. Osiossa opetetaan $\frac{1}{10} = 0,1$ ja osiossa on tehtäviä, joissa murtoluvun osuuden verran tulee värittää kuvasta ja ilmaista desimaalilukuna. Osiossa on myös tehtävä, jossa tulee osata verrata, onko annettu murtoluku samansuuruinen, isompi tai pienempi kuin annettu desimaaliluku.

Muissa osion kappaleissa murtolukuja ei enää näy, sen sijaan loput kappaleet harjoittavat monipuolisesti desimaalilukujen laskutoimituksia, sekä kykyä vertailla desimaalilukuja toisiinsa. Osiossa on myös paljon loogista päättelyä vaativia pulmia.

### 1.2.3 Tuhattaituri 5b

Vuoden 2016 opetussuunnitelman mukaisia kirjoja ei gradutyötäni kirjoittaessa tosiaan oltu julkaistu kirjaa Tuhattaituri 5a pidemmälle. Kyseisessä kirjassa kyllä käsiteltiin jälleen murtolukuja ja desimaalilukuja, mutta ei murtolukujen ja desimaalilukujen välistä yhteyttä. Sen sijaan vuoden 2004 opetussuunnitelman mukaisissa kirjoissa tämä murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys löytyy selvästi, joten luultavasti aihe on myös vuoden 2016 mukaisissa myöhemmissä kirjoissa.

Vuoden 2004 opetussuunnitelman mukainen Tuhattaituri 5b [3] sisältää viisi jaksoa, joista ensimmäisen jakson ensimmäinen kappale on nimetty ”Murtoluvuista desimaalilukuihin”. Kyseisessä kappaleessa on erilaisia ruudukoita, jotka tulee ilmaista murtolukuna ja desimaalilukuna, murtolukujen ja desimaalilukujen lukusuoralle sijoittamista, murtolukujen ja desimaalilukujen muuttamista toisikseen, sekä oikeiden termien yhdistämistä murtolukuihin ja desimaalilukuihin (esimerkiksi ”yhdeksän kymmenesosaa”).

Aihetta jatketaan edelleen kirjan toisessa jaksossa kappaleessa ”Murtoluvun, desimaaliluvun ja prosenttiluvun yhteys”, jossa edellä mainitun tyylisiin tehtäviin on lisätty prosenttiluvuksi muuttamista. Kirjan toisen jakson lopuissakin prosenttilukuun liittyvissä kappaleissa pyörii murtoluvut, sekä desimaaliluvut.

### 1.2.4 Tuhattaituri 6b

Vuoden 2004 opetussuunnitelman mukaisen oppikirjan Tuhattaituri 6b [4] ensimmäinen jakso aloittaa kappaleella ”Murtoluvuista desimaalilukuihin”. Kappale on samantyylinen, kuin oppikirjassa Tuhattaituri 5b oli, joten kappale toiminee muistiin palauttamisena. Kappaleessa on myös paljon hankalampia sekalukuja, kuin Tuhattaituri 5b:ssä oli.

Samassa kappaleessa otetaan myös lakin käyttään lisätehtävissä, jossa annettu murtoluku tulee muuttaa laskimen avulla desimaaliluvuksi.

Kirjan toinen osio jatkaa murtolukujen, desimaalilukujen ja prosentin välisen yhteyden parissa myös tiiviisti.

### 1.2.5 Koonti Tuhattaituri kirjoista

Vuoden 2016 opetussuunnitelman vaatimuksissa matematiikan kohdalla lukee selvästi murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys ja tämä vaatimus toteutetaan Tuhattaituri oppikirjassa hyvin. Aihe tulee vastaan ensimmäisen kerran viidennellä luokalla, mutta aihetta syvennetään edelleen kuudennella luokalla ja mukaan otetaan myös prosenttiluvut. Kuudennella luokalla kirjassa on myös harjoituksia laskimella murtoluvun desimaaliluvuksi ratkaisemiseksi, joten aihetta käsitellään mielestäni monipuolisesti. Tämän kirjasarjan perusteella oppilailla pitäisi mielestäni olla hyvä käsite murtolukujen ja desimaalilukujen välisestä yhteydestä, mutta omien kokemusteni perusteella yläkoulussa tämä ei kuitenkaan pidä paikkansa.

Kirjasarja on myös visuaalisesti näyttävä ja tehtäviä on hyvin monipuolisesti. Murtolukuja esitetään niin pizzapaloina, pannupizzoina, osuuksina kuvioista kuin ruudukkoina, mikä mahdollistaa erilaisia tapoja hahmottaa murtolukuja ja sitä kautta desimaalilukuja. Vuoden 2016 opetussuunnitelman mukaiset Tuhattaituri kirjat ovat visuaalisempia, kuin vuoden 2004 opetussuunnitelman mukaiset Tuhattaituri kirjat. Mielestäni vanhempienkin kirjojen tapa havainnollistaa ja visualisoida murtolukuja, sekä desimaalilukuja on kuitenkin riittävä.

## 1.3 Murtoluvut, desimaaliluvut, sekä murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys yläkoulussa

Yläkoulun opetussuunnitelmassa murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys ei tule niin suoraan esille, kuin alakoulun puolella. Oppikirjoja katsastaessa aihe kuitenkin tulee vastaan osana yksittäisiä kappaleita. Etenkin 8.luokan prosenttilaskentaosioissa tulee osata murtolukujen muuntaminen desimaaliluvuksi ja edelleen prosenteiksi.

Moni tarkastelemani oppikirjat aloittavat yläkoulun matematiikan lukujen ja laskutoimitusten kertaamisella alakoulusta. Tämä osio kokoaa alakoulussa opitut asiat murtoluvuista, desimaaliluvuista, kokonaisluvuista, luonnollisista luvuista, yms. aihealueista. Valitsin tarkasteluun enimmäkseen yläkoulun seitsemännelle luokalle suunniteltuja oppikirjoja, joissa murtoluvut ja murtolukujen laskutoimitukset ovat usein isompana kokonaisuutena.

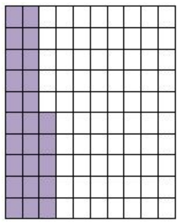
Tarkastelen tässä osiossa OPS2016 [7] mukaista Kuutio 7 kirjaa [6], sekä vanhan opetussuunnitelman mukaista Pointti 1 kirjaa [5].

### 1.3.1 Pointti 1 - Yläkoulun matematiikka

Pointti 1 sisältää kuusi kappaletta: luonnolliset luvut ja murtoluvut, desimaaliluvut ja kokonaisluvut, tasogeometria, monikulmiot, lausekkeet ja yhtälöt, sekä riippuvuus koordinaatistossa. [5] Kuten monet muutkin oppikirjat, niin myös Pointti kirjasarja aloittaa yläkoulun matematiikan lukujen ja laskutoimitusten käsittelyllä.

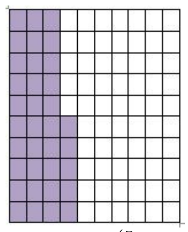
Kirjan opit aloitetaan murtolukujen käsittelyllä ja murtolukuosiossa kulkee mukana myös alakoulun puolelta tutut murtolukukakut, sekä murtolukupalkit. Myös erikokoisia ruudukoita näkee joissain tehtävissä ja esimerkeissä, joissa tulee ilmaista väritetyn alueen osuus kuviosta. Visuaalisia kuvioita lukuunottamatta tehtävissä ei kuitenkaan esiinny kovin toiminnallisia menetelmiä. Kuvioiden käyttö on mielestäni kuitenkin hyvä tukien visuaalisesti hahmottavia oppijoita.

Luonnolliset luvut ja murtoluvut osion jälkeen siirrytään desimaaliluvut ja kokonaisluvut osioon. Osion ensimmäisessä kappaleessa, askel desimaalilukuihin, sivuutetaan heti murtolukujen ja desimaalilukujen välistä yhteyttä. Kappale aloitetaan esimerkillä: ”Jokainen päättyvä ja jokainen päättymätön jaksollinen desimaaliluku voidaan kirjoittaa murtolukuna. Jokainen murtoluku voidaan kirjoittaa desimaalilukuna.”Tekstiä visualisoidaan palkein tai 10x10 ruudukolla, esimerkiksi seuraavanlaisella esimerkillä:



$$^{2)}\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$$

Vastaavasti toisessa esimerkissä muunnos tehdään desimaaliluvuista murtolukuihin:



$$0,35 = \frac{35}{100}^{(5} = \frac{7}{20}$$

Osion tehtävien tekeminen aloitetaan myös vastaavanlaisilla tehtävillä:

174 Kirjoita desimaalilukuna

a) viisi kokonaista kaksikymmentäkolme sadasosaa

b) kolmekymmentä kokonaista neljä sadasosaa

c) kaksi kokonaista 25 tuhannesosaa.

175 Kirjoita desimaaliluku murtolukuna

176 Kirjoita murtoluku desimaalilukuna

177 Merkitse murto- ja desimaalilukuna, kuinka suuri osa kuviosta on väritetty.

Myöhemmin tehtävissä tulee myös vastaan desimaalilukujen ja murtolukujen suuruusvertailua.

Kirjassa murtolukujen ja desimaalilukujen välistä yhteyttä hyödynnetään myös myöhemmissä osioissa. Esimerkiksi desimaalilukujen kertolaskua opetetaan muuntamalla kerrottavat desimaaliluvut ensin murtoluvuiksi, suorittamaan murtolukujen kertolaskun ja muuntamalla saatu murtoluku takaisin desimaaliluvuksi. Samalla tavalla toimitaan myös desimaalilukujen jakolaskussa.

Kokonaisuutena mielestäni Pointti 1 -kirjassa desimaali ja murtolukujen välinen yhteys kulkeutuu mukana hyvin, eikä aihe jää erilliseksi muusta sisällöstä.

### 1.3.2 Kuutio 7

Kuutio 7 on jaettu kolmeen isompaan kokonaisuuteen: luvut ja laskutoimitukset, geometrisia kuvioita, sekä luvuista kirjaimiin.[6] Kirja poikkeaa myös hieman siten, että laskut aloitetaan kertaamalla desimaaliluvut ja sen jälkeen siirrytään murtolukujen pariin.

Murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys ei tule esiin omana kappalenaan, mutta aihetta sivuutetaan heti oppikirjan alussa "Kokonaisluvut ja desimaaliluvut"sekä "Murtoluvun käsite-kappaleissa. Molemmissa kappaleissa on tehtäviä, joissa murtoluvut tulee muuttaa desimaaleiksi ja toisinpäin. Huomattavaa on kuitenkin kirjan tapa opettaa asia: "Murtoluvun muuttaminen desimaaliluvuksi: Murtoluvusta saadaan desimaaliluku suorittamalla murtoluvun esittämä jakolasku."Esimerkin vieressä on myös laskimen kuva, joten aihetta tuetaan ratkaistavaksi laskimen avulla.

Esimerkistä huolimatta kirjassa on myös tehtäviä, joissa murtoluku tulisi muuttaa desimaaliluvuksi ilman laskimen apua. Kappaleissa "Murtoluvun käsite"ja "Lukujen vertailu"harjoitellaan myös murtolukujen ja desimaalilukujen suuruusvertailua. Lisäksi osiossa myöhemmin vastaan tulevassa kappaleessa "Yhdistettyjä laskutoimituksia"harjoitellaan sellaisia laskutoimituksia, joissa mukana on niin murtolukuja kuin desimaalilukuja.

Kirjassa on käytetty visuaalisuutta, mutta itse tehtävät ovat melko yksinkertaisia ja kirjassa ei murtolukuosiossa näy kovin paljoa esimerkiksi perinteisiä pizza- ja murtolukupalkki tehtäviä. Myös sellaiset tehtävät, joissa määritetään väritetyn alueen osuus piirrustuksesta ovat vähissä. Sen sijaan kirjassa on huomioitu ohjelmointiosuus, sekä laskimen käyttöä jo kirjan alusta alkaen.

## 1.4 Murtolukujen ja desimaalilukujen toiminnalliset menetelmät

Murtolukuihin löytyy paljon erilaisia toiminnallisia menetelmiä etenkin alakoulun puolelle. Murtolukuja usein esitetään kirjoissa erilaisten pizza- tai palkkimallien avulla, kuitenkin enemmän alakoulussa, kuin yläkoulussa. Yläkoulun oppikirjoissa on selkeästi enemmän tekstiä, kun taas alakoulun oppikirjat ovat kuvitteellisempia.

Matematiikkalehti Solmu on esitellyt murtolukuja peruskoulujen yläluokkien matematiikassa Hanna Laitilan Pro Gradu työn pohjalta. [8] Artikkelissa on esitelty mahdollisuuksia murtolukukakkujen hyödyntämiseen seuraavissa aihealueissa:

- Murtolukujen suuruusvertailua - lukusuora
- Murtolukujen laventaminen ja supistaminen
- Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku
- Murtolukujen kertolasku
- Murtolukujen jakolasku
- Murtolukujen yhteys desimaalilukuihin ja prosentteihin

Desimaaliluvuissa murtolukukakkuja voi hyödyntää siten, että oppilaat etsivät palan joka vastaa desimaalia 0,1, jonka jälkeen tulos merkitään murtolukuna. Havaitaan, että $0,1 = \frac{1}{10}$. Tämän jälkeen oppilaat saavat tehtäväksi osoittaa, että $0,3 \neq \frac{1}{3}$, kuten usein luullaan.

Murtolukuihin löytyy paljon myös muita toiminnallisia menetelmiä niin Oulun yliopiston LUMA-keskuksen toimesta, kuin Helsingin yliopiston LUMA-keskuksen tiedeluokka Summamutikan toimesta. Selailtuani erilaisia materiaaleja en kuitenkaan löytänyt vastaavaa ajatusta, kuin kehittämässäni menetelmässä, että murtoluku muutettaisiin desimaaliluvuksi. Tämän perusteella suunnittelemalleni menetelmällä muuttaa murtoluvut desimaaliluvuiksi on siis tarve.

### 1.4.1 Milla Ristiluoman peltipizzamallit

Joulukuussa 2017 julkaistu Milla Ristiluoman pro gradu tutkielma [9] hyödyntää saman tyyppisiä peltipizzamallia ja ruudukoita kuin itsekin hyödynnän omassa pro gradu tutkielmassani. Ristiluoma asetti tutkimuskysymyksikseen:

1) Tukeeko peltipizzamalli murtolukujen oppimista ja miten?
2) Kokevatko oppilaat peltipizzamallin kiinnostavaksi tavaksi oppia murtoluvuista?

Tutkimus oli melko suppea, joten absoluuttisia vastauksia tutkimuskysymyksiin Ristiluoma ei saanut.

Ristiluoman käyttämä menetelmä oli kuitenkin melko lähellä omaani: hän loi oppitunti suunnitelman, jota testasi sitten alakoululaisille ja kyselylomakkeen, jossa oppilaat arvioivat oppimiaan asioita.

Ristiluoman tekemässä suunnitelmassa niin sanottua pannupizzamallia hyödyntämällä voidaan tehdän suuruusvertailua, sekä ratkoa yhteen- ja vähennyslaskuja, kertolaskuja, sekä jakolaskuja. Ristiluoman mukaan oppilaat osasivat yllättävän hyvin ratkoa toiminnallisen materiaalinsa tehtäviä. Toisaalta alkukyselyn perusteella Ristiluoma totesi murtolukujen olevan haastava aihe alakoulussa. Alakoulun luokilla murtolukuja käsitelläänki joka vuosi.

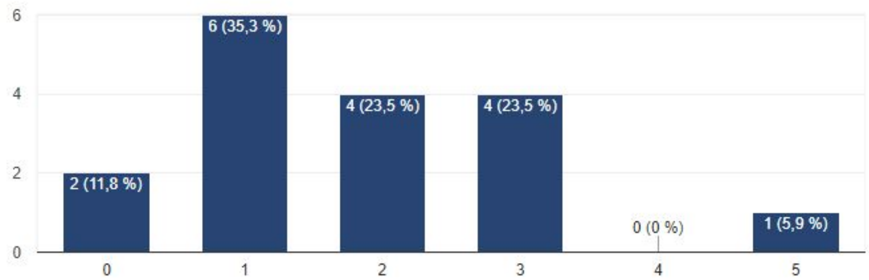
Ristiluoma kirjoittaa myös, että: ”Havaintojen ja palautteen perusteella voidaan päätellä, että peltipizzamalli on toimiva murtolukuja havainnollistava opetusmalli. Sitä tulisi pitää opetuksessa muiden murtolukumallien rinnalla laajentamassa oppilaan käsitystä murtoluvuista ja havainnollistamassa sellaisia laskuja, joita ei toisilla malleilla voi havainnollistaa. Aiempi tutkimustieto tukee monen erilaisen havainnollistamismateriaalin käyttöä lomittain. Opetustuokioiden perusteella voi sanoa, että osa oppilaista koki peltipizzamallin kiinnostavaksi tavaksi oppia murtoluvuista. Peltipizzamalli myös tuki aktiivisesti osallistuvien oppilaiden murtolukujen oppimista ja käsitteenmuodostusta lisäämällä ymmärrystä."Ristiluoman tutkimukseen ei kuitenkaan ollut mahdollista saada absoluuttisia vastauksia, mutta uskon Ristiluoman väitteeseen. Myös omat kokemukseni oman gradutyöni testaus tunneilta vahvistavat edelleen tätä.

Kaiken kaikkiaan Ristiluoman tuntisuunnitelma sopisi hyvin yhteen omani kanssa, sillä ideat ja ruudukon avulla murtolukujen hahmottaminen perustuvat samanlaiseen ideaan.

# 2 Toiminnallinen matematiikka oppimiskäsityksissä ja oppimismenetelmissä

Tähän kappaleeseen olen koonnut erilaisia oppimis- ja tiedonkäsityksiä, matematiikan opetusmenetelmiä ja erilaisia viitekehyksiä, sekä avannut unkarilaista matematiikkaa.

Omien kokemuksieni pohjalta toiminnallinen matematiikka on käytännöllinen tapa selittämään matemaatikan abstraktista puolta. Kuitenkin toiminnallisuus tuntuu Suomessa olevan enemmän esi- ja alkuopetukseen suunnattua toimintaa, kuin yläkouluun ja valitettavasti olen nähnyt vain harvojen yläkouluopettajien käyttävän toiminnallista matematiikkaa opetuksessa. Mielipidettäni tukee myös keväällä 2016 Helsingin yliopiston pedagogisisten opintojeni kurssilla "opettaja työnsä tutkijana"yhteistyössä Mervi Tiikkajan kanssa tehty pieni tutkimus toiminnallisen matematiikan käytöstä opetuksessa. Lähetimme kyselyn 43 koulun rehtorille ympäri Suomen. Saimme vastauksia kuitenkin vain 16 opettajalta. Vastaajista 7 työskentelee Helsingissä, 2 Kuopiossa, 2 Rovaniemellä, 1 Joensuussa, 1 Lahdessa ja 3 ei halunnut ilmoittaa kaupunkia, jossa työskentelee. Vastaajien määrä oli tosiaan valitettavan pieni, joten luotettavasta tutkimuksesta ei ole kyse: tutkimus toimii ennemmin suuntaa antavana omien tuntemuksieni lisäksi. Käytimme tutkimuksessa asteikko 0-5, jossa 0 = ei käytä toiminnallista matematiikkaa lainkaan, 5 = käyttää toiminnallista matematiikkaa lähes jokaisessa aiheessa. Vastaukset jakautuivat seuraavista:




Arvioi kuinka paljon käytät toiminnallista matematiikkaa opetuksessa? -kyselyn vastausten jakautuminen

Samassa yhteydessä vastanneista opettajista peräti 88,2% haluaisi käyttää toiminnallista matematiikkaa enemmän opetuksessaan.

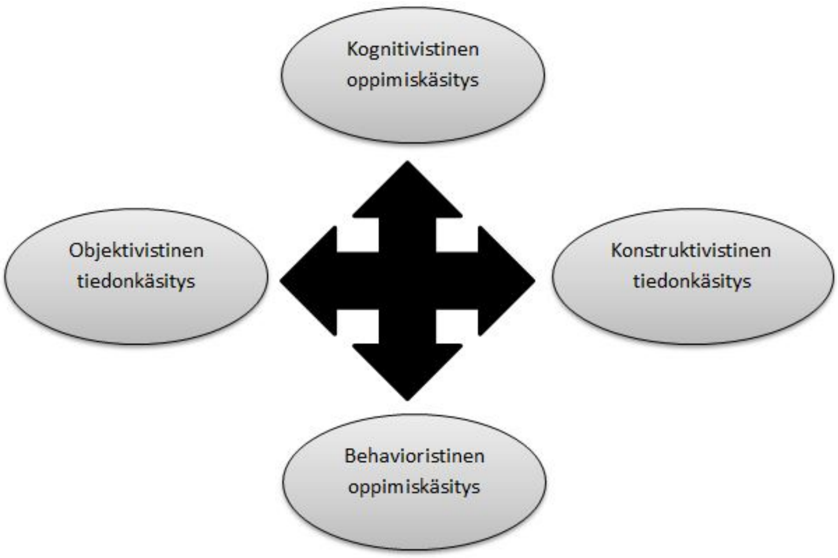
Lisäksi väitteeseen "toiminnallinen matematiikka auttaa oppilaiden matematiikan ymmärtämistä"peräti 94,1% vastasi 3 tai 4 asteikolla 0-5, vain yksi opettajista vastasi 1. Väitteeseen "toiminnallinen matematiikka lisää oppilaiden kiinnostusta matematiikkaa kohtaan"puolestaan asteikolla 0-5 41,2% vastasi 4 tai 5, 52,9% vastasi 3 ja vain yksi opettajista vastasi 2.

Tulosten perusteella ja myös omien kokemuksieni perusteella toiminnallisen matematiikan käyttö yläkouluissa on melko vähäistä, mutta opettajat haluaisivat kyllä käyttää toiminnallisuutta enemmän. Kuten myöhemmin unkarilaisen matematiikan esittelyssä tulee ilmi, niin toiminnallisuuden toteuttaminen on kuitenkin paljon opettajan resursseja ja aikaa vievä opetusmenetelmä, mikä saattaa olla osa syy vähäiseen toiminnallisen matematiikan käyttöön. Toisaalta myös opetussuunnitelma sidonnaisuus ja tiukassa olevat oppituntien määrät voivat rajoittaa toiminnallisen matematiikan käyttöä.

## 2.1 Erilaiset oppimis- ja tiedonkäsitykset

Ihmisen elämä on jatkuvaa oppimista. [12] Huomaamatta opimme jatkuvasti uusia taitoja kiinnittämättä huomiota siihen, millaisen oppimisprosessin kävimme läpi. Kuitenkin muistamme asioita erilaisista oppimistilanteista, kuten lukemaan oppimisesta. Oppiminen on niin tuttua, että oppimisen kuvaaminen ja selittäminen on vaikeaa. Halumme selittää oppimista on kuitenkin luonut erilaisia oppimisteorioita, jotka määrittävät oppimista eri tavoin. [12]

Nykyään kasvatustieteellisiä suuntauksia on jo hyvin paljon ja suuntaukset saattavat mennä helposti sekaisin. Patrikainen avaa erilaisia keskeisiä tiedon- ja oppimiskäsityksiä, sekä eksplikoi niiden välisiä yhteyksiä.[13] Patrikainen esittää, että oppimiskäsitysten ääripäinä erotetaan behaviorismi ja kognitivismi. Vastaavasti tiedonkäsitysten ääripäinä erottuu objektivismi ja konstruktivismi. Näiden avulla Patrikainen on luonut seuraavanlaisen tiedon- ja oppimiskäsitysten muodostaman nelikentän:




Tiedon- ja oppimiskäsityksen muodostama "nelikenttä"[13]

Objektivistisessa tiedonkäsityksessä epistemologinen tieto maailmasta voidaan opettaa ja oppia absoluuttisina, kun taas konstruktivinen tiedonkäsitys olettaa, että jokainen tekee oman tulkintansa maailmasta ja luon oman tietämysrakenteen. Näihin tiedonkäsitykseen kytkeytyy läheisesti behavioristinen ja kognitivistinen oppimiskäsitys. [13] Behaviorismin mukaan tieto voidaan siirtää paloiteltuna tai sellaisenaan suoraan opettajalta oppilaan tajuntaan. [13] [10] Kognitivismin mukaan puolestaan on tärkeää oppilaan itse luoma ajattelumalli ja oppimisstrategia uuden tiedon oppimiseen. Edellisen nojalla Patrikaisen mukaan käsitteellä "behaviorismi"tarkoitetaan objektivistis-behavioristista ja käsitteellä "konstruktivismi"tarkoitetaan kognitivistis-konstruktiivista opetus- ja oppimisnäkemystä.[13]

Behavioristinen oppimiskäsitys on ollut valloillaan viime vuosikymmeninä, mutta nykyisin oppimisen on katsottu olevan enemmän konstruktiivista. [12] Behavioristinen oppimiskäsitys on kuitenkin edelleen perinteisen koulutuopetuksen usein käytössä oleva lähestymistapa, vaikka kasvatustieteellisessä kirjallisuudessa on useita johtopäätöksiä, joissa kognitiivisiin, konstruktiivisiin, sosiokonstruktivismiin ja sosiokulttuurisiin perustuvat oppimisnäkemykset ovat parempia behavioristiseen näkemykseen verrattuna. (Viro 2014)

Matematiikassa behavioristinen oppimiskäsitys näkyy usein siten, että opettaja ensin käy teorian läpi, esittelee pari esimerkkiä, jonka jälkeen oppilaat alkavat laskemaan helpoimmista tehtävistä vaikeampiin omaa tahtiaan. Myös oppikirjat tukevat usein tämänlaista lähestymistapaa: monissa oppikirjoissa myös esimerkit menevät vaikeusjärjestyksessä ja tehtävät on saatettu jakaa helppoihin ja vaikeisiin. Omien kokemusteni perusteella tämäntyylinen opetus on kuitenkin omiaan tukemaan ulkoaopettelun taitoa, eikä välttämättä niinkään ymmärrystä. Usein tehtävissä riittää, että osaa sijoittaa tehtävien lukuarvot oikeisiin kohtiin annettuun kaavaan, kuin vastaavassa esimerkissä oli. Vaikka konstruktivistinen oppimiskäsitys on lisääntynyt ja se näkyy yhä enemmän myös opetussuunnitelmissa, niin silti matematiikan opetus tahtoo usein jäädä hyvinkin opettajajohtoiseksi ja behavioristiseksi.

Viime vuosikymmeninä oppimiseen liittyvä keskustelu on kuitenkin monipuolistunut ja keskustelu on siirtynyt opettajajohtoisesta oppimisesta enemmän oppilaan sisäisen oppimisprosessin tarkasteluun. Ymmärrystä painottavaa matematiikka on korostettu yhä enemmän 1940-luvulta lähtien. Tällä on ollut positiivinen vaikutus osaamiseen, sekä tietojen ja taitojen käyttämiseen uusissa tilanteissa. Myös muuttuneen yhteiskunnan vaatimukset ovat edesauttaneet ymmärtämistä painottavan osaamisen merkitystä: yksilöltä vaaditaan kokoajan enemmän taitoa itse ohjata ja säädellä omia ajatteluprosessejaan. Tämä tarve ymmärtää monimutkaisempia ilmiöitä osoittaa myös perinteisten 1970- ja 1980-luvuilla käytössä olleiden opetuskäytäntöjen rajallisuuden. [11]

Vielä 1900-luvun loppupuolella behavioristinen oppimiskäsitys oli valloillaan, mutta nykyisin ollaan siirrytty enenevissä määrin konstruktivistisen oppimiskäsityksen suuntaan, mikä näkyy myös opetussuunnitelmissa. Tämä on hyvä asia, sillä behavioristisessa oppimisnäkemyksessä opettaja hallitsee oppimisprosesseja ja oppiminen on lähinnä mieleenpainamista. Mieleenpainaminen ei kuitenkaan merkitse opetettavan asian ymmärtämistä. Sen sijaan konstruktivitisessa oppimiskäsityksessä oppilaan yksillöllisyys tulee esille: jokaisella oppilaalla on omanlainen itselleen sopiva tyyli oppia ja käsitellä tietoa. Tämä tukee myös asian ymmärtämistä paremmin, kun jokainen voi käsitellä opetettavaa asiaa itselle parhaalla tyylillä.

Toki myös konstruktivistinen oppimisnäkemys kerää kritiikkiä. Patrikainen [13] kirjoittaa konstruktivistinen oppimiskäsityksen olevan tietopainotteinen ja oppimisnäkemyksessä oletetaan, että tieto itsestään synnyttää oppilaan oppimismotivaation. Ei kuitenkaan ole selvitetty, että miten oppilas saadaan kiinnostumaan opetussuunnitelman määrittelemistä aiheista. Lisäksi kritiikkiä on tullut siitä, että konstruktivistinen oppimisnäkemys ei huomioi tarpeeksi ihmisen tunteita.

## 2.2 Matematiikan oppimisen erilaiset viitekehykset

Matematiikan oppimista ja matematiikan luonnetta tieteenalana on tutkittu ja määritetty melko paljon ja erilaisin tavoin. Juha Oikkosen mukaan matematiikan opiskelijoille matematiikka näyttäytyy niin, että matematiikka tutkii aivan itse määrittelemiään omia maailmoja. [15] Toinen näkökanta on, että matematiikka on äidinkielen jatke: siinä missä äidinkieli sisältää paljon tietoa ja ajattelua, niin myös matematiikan eri aiheet ja käsitteet vaativat samantapaista osaamista. Kolmas näkökanta on, että matematiikka on ihmisen yritys vastata moniin arkielämän tai muiden tieteenalojen tarpeisiin ja haasteisiin. [15]

Matematiikkaa ja matemaattista ajattelua voidaan toteuttaa hyvin erilaisin tavoin. Esimerkiksi peruslaskutoimitus $85 + 37$ voidaan ratkaista hyvin monella tavalla. Joku laskee ensin kymmenet yhteen: $80 + 30 = 110$ ja sen jälkeen ykköset: $5 + 7 = 12$ ja lisää tuloksen kymmenien perään. Joku toinen saattaa puolestaan laskea ensin $85 + 7$ ja lisätä sitten 30 perään. Kolmas voi puolestaan laskea allekkain ja neljäs saattaa pyöristää $85 \approx 100$, laskea $100 + 37$ ja vähentää tuloksesta erotuksen $100 - 85 = 15$. Taktiikoita ratkaista erilaisia laskutoimituksia on useita. Kuitenkaan opetuksessa ei välttämättä huomioida erilaisia tapoja ratkoa laskutoimituksia, eikä oppilas useinkaan joudu miettimään tapaa, jolla tehtäviä ratkaisee. Pahimmassa tapauksessa oppilaalla on valtavia virhekäsityksiä, joita ei edes huomata opetuksen aikana, sillä oppilaan tapoja ratkaista ja ymmärtää tehtävä ei huomioida. Tämänkin puolesta ymmärrykseen perustuvat matematiikka olisi tärkeää ja sellaiseen toiminnallinen matematiikka toimii hyvin.

David Tall [14] on esittänyt erilaisia näkökulmia matematiikan opetukseen ja matemaattisen ajattelun kehittymisestä lapsesta alkaen. Hän perustelee olevan kolme erilaista matematiikan maailmaa:

- Käsitteellis-ruumillistunut (conceptual-embodied)
- Proseptuaalis-symboolinen (proceptual symbolic)
- Aksiomaattis-formaali (axiomatic-formal)

Käytän tästä eteenpäin maailmoista nimistyksiä "ilmenevä", "proseptuaalinen" ja "formaali" maailma. Jokainen näistä maailmoista pitää sisällään erilaisia osa-alueita matematiikasta. Ilmenevään maailmaan kuuluu todellisen maailman objektiivista havainnointia, sisäisten käsitysten visualisointia, sekä erilaiset kuviteltavissa olevat asiat. Tällaisia ovat niin ikään Euklidinen geometria, mutta myös muut geometriat, joita voidaan käsitteellisesti ruumillistaa, eli visuaalis-spatiaalisesti hahmottamaan. Ilmenevä maailma pitää sisällään sen, mitä tunnemme ja aistimme.

Toinen Tallin matematiikan maailmoista on proseptuaalinen maailma, joka tunnetaan laskemiseen, sekä aritmetiikan, algebran, jne. käsittelyyn käyttämiemme symbolien maailmana. Tähän maailmaan kuuluu konkreettinen laskeminen, erilaiset symbolit ja niiden käyttö, sekä määrätyin säännöin laskutoimitusten suorittaminen. Symbolit, kuten reaaliluvut $\mathbb{R}$, ovat iso osa proseptuaalista maailmaa: voimme käyttää valmiiksi kiteytettyä symbolia laskuissa, joka kattaa kaikki reaaliluvut ilman, että määritämme numerollisesti reaaliluvun arvoa. Proseptuaalisessa maailmassa laskettaessa hyödynnetään usein laskussa käytettäviä kiteytettyjä käsitteitä symbolilla. Nämä symbolit mahdollistavat "isomman kokonaisuuden"yksinkertaistamisen vaivattomasti, kuten reaalilukujen $\mathbb{R}$ tapauksessa: reaalilukuja ei tarvitse sen enempää avata, kun symboli tekee sen meidän puolesta.

Kolmas Tallin esittämä matematiikan maailma on formaali maailma. Tämä maailma perustuu ominaisuuksiin, jotka ilmaistaan termeinä muodollisista määritelmistä ja joita käytetään aksioomina erittelemään matemaattisia rakenteita, kuten "ryhmä", "ala", "vektori avaruus", "topologinen avaruus", jne. Formaali maailma muuttaa aiemmat kokemuksemme päässämme ymmärtämään ei tuttuja kokemuksiamme, kuten aksioomia, jotka ovat tarkoin muotoiltu määrittelemään matemaattisia rakenteita tiettyjä sääntöjä noudattaen. Aksiomaattisessa järjestelmässä voidaan määrittää uudet käsitteet, päätellä niiden ominaisuudet ja rakentaa johdonmukainen ja loogisesti päätelty teoria.

Tallin mukaan matematiikassa siirrytään näistä maailmoista toisiinsa, mutta eri yksilöt kulkevat hyvin erilaisia reittejä näiden maailmojen läpi. Joillakin on sellaisia ongelmia maailmasta toiseen siirtymisessä, että ilmiötä kutsutaan dyskalkuliaksi. Kuitenkin useimmat lapset selvityvät annetuista laskennan toimintamalleista, mutta tapoja selviytymiseen aritmetiikan näkökannalta on useita. Jotkut lapset pysyvät annetuissa laskentamalleissa pidempään, kun taas toiset luovat joustavampia tapoja ratkaista samoja tehtäviä. Toisaalta, jos omaa käytettyä laskumenetelmää ei pysty selittämään tai ymmärtämään, niin laskemisen oppimisesta tulee rutiininomaista ymmärtämiseen painottumisen sijaan.

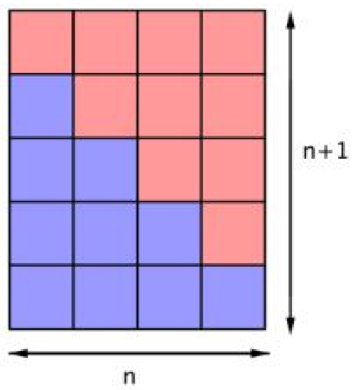
Tallin mukaan erilaisilla oppijoilla tieto näiden matematiikan kolmen maailman välillä voi siirtyä eritavalla, jolloin itse lopputulokset poikkeavat toisistaan. Esimerkiksi vaikka tiedämme, että $2 + 3 = 5$, niin silti ei tiedetä, paljon $2 + 3x$ on, ellei tuntemattoman $x$ arvo ole tiedossa. Jollain oppijalla tieto maailmasta toiseen saattaa siirtyä siten, että tuntematon $x$ ajatellaan koodina $a = 1$, $b = 2$, jne., jolloin $30 - x = 6$, sillä $x = 24$. Vastaavasti, jos $x = 3$, voidaan ajatella $2x = 23$. Tällaisissa Tallin esittämissä tapauksissa rutiininomaiseen laskemiseen nojaaminen voi olla turvallisin ratkaisu, kunhan oppijan virhekäsitykset ensin huomataan.

Myös Tallin tutkimuksen tulokset tukevat toiminnallisen matematiikan käyttöä. Perinteinen matematiikan opetus on usein yksilöinä työskentelyä, jolloin toiminnallisuuteen kuuluva ryhmätyö- ja aktiivisuustaidot voisivat paljastaa erilaiset virhekäsitykset ja jopa mahdollisen dyskalkulian.

Jani Hannula [16] on puolestaan laajentanut Juha Oikkosen matematiikan kahdet kasvot ja David Tallin matematiikan kolme maailmaa kuuteen osaan. Hannula käyttää esimerkkinä Tallin matematiikan kolmen maailman ilmenemisestä summaa $1+2+3+\ldots+100$, joka voidaan havaita samaksi kuin $50*101$. Yleisemmin voidaan laskea $n$ peräkkäistä luonnollista lukua yhteen kaavalla

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Ilmenevässä maailmassa summakaavan voi nähdä seuraavanlaisen kuvan avulla.




Kuvio 1: Hannulan esittämä summakaava Tallin ilmenevästä maailmassa [1]

Kuvassa summa $1+2+3+4$ ruumillistuu ja ilmenee punaisten tai sinisten ruutujen lukumääränä. Nyt havainto $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ pitää paikkansa, eli $\frac{4*5}{2}=1+2+3+4$. Toisaalta voidaan havaita, että havainto pitää paikkansa oli $n$ mikä tahansa.

Proseptuaalisessa maailmassa samaa voidaan ajatella merkitsemällä symboliksi $S=1+2+3+4$ ja muodostamalla allekkain lasku:

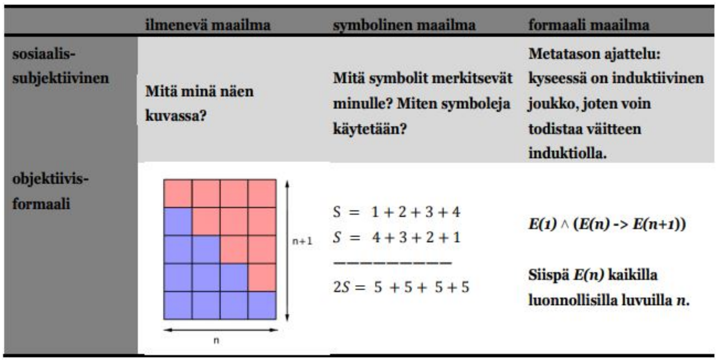
$$\begin{aligned}
&S=1+2+3+4\\
&S=4+3+2+1\\
&-----------\\
&2S=5+5+5+5
\end{aligned}$$

Nyt $2S=4*5$, eli $S=\frac{4*5}{2}$.

Vastaavasti formaalissa mailmassa matematiikka perustuu sovittuihin aksioomiin. Annettu yhtälö nähtäisiin väitteenä, joka tulisi todistaa esimerkiksi matemaattisella induktiolla.

Hannula kirjoittaa Juha Oikkosen näkevän matematiikassa kahdet kasvot ja matematiikka jakautuukin "sosiaalis-subjektiiviseen" ja "objektiivis-formaaliin" puoleen. Kun nämä yhdistää Tallin matematiikan kolmeen maailmaan, saadaan laajempi "matemaatikan kuuden osan" viitekehys. Tässä jaossa esimerkiksi ilmenevään maailmaan piirretyn summakaavaan ymmärtämiseen tarvitaan jotain objektiivista ja subjektiivista. Proseptuaalisen maailman laskusäännöt ovat taas täysin objektiivisia. Toisaalta oppijoiden muodostamat miniteoriat, eli omat laskusäännöt, ovat sosiaalis-subjektiivisia. Myös täysin objektiiviseksi ajateltavaan formaaliin maailmaan liittyy sosiaalis-subjektiivinen puoli.

Nyt Hannulan esittelemän summakaavan käsittelyn voi jakaa kuuteen osaan, kuten seuraavassa kuviossa Hannula esittää:




Kuvio 2: Hannulan esittämät matematiikan eri osat [2]

Huomataan kuviosta, että Hannulan käyttämä ilmaisu Tallin symbolisesta maailmasta vastaa aiemmin käyttämääni proseptuaalista maailmaa.

Tähän matematiikan kuuden osan viitekehykseen voidaan Hannulan mukaan asettaa seuraavat tavoitteet:

- malli kykenee ennustamaan tutkittavia ilmiöitä,
- malli on selitysvoimainen,
- mallia voidaan käyttää monen eri ilmiön yhteydessä,
- malli auttaa monimutkaisten ilmiöiden jäsentämisessä,
- malli tarjoaa välineen datan analysointiin ja
- malli tarjoaa sellaisia puhetapoja ja erotteluja oppimisesta, jotka ovat rikkaampia kuin pelkät pinnalliset kuvaukset.

Esimerkiksi miniteoriat kuuluvat tässä viitekehyksessä ainoastaan symbolisen maailman sosiaalis-subjektiiviseen osaan.

Mielestäni Hannulan esittelemä jako matematiikan kuudesta osasta on järkeenkäyvä ja jaon avulla voidaan selittää oppimisprosesseja laajemmin kuin vain Tallin matematiikan kolmen maailman avulla. Toiminnallista matematiikkaa voi myös strukturoida tämän viitekehyksen avulla, jolloin mahdollisimman monta osaa näistä kuudesta saataisiin tehtävään hyödynnettäväksi.

## 2.3 Unkarilainen matematiikka

Unkarilaiset pärjäävät matematiikan osaamista vaativissa kansainvälisissä testeissä ja matematiikan olympialaisissa yllättävän hyvin, lisäksi joukosta löytyy matemaattisten alojen Nobel-palkintojen saajia.[17] Unkari pärjää siitäkin huolimatta, että siellä on niukat resurssit, eikä maa ole kovin suuri. [21] Ei olekaan ihme, että unkarilainen matematiikan opetus kiinnostaa niin suomessa, kuin muuallakin maailmassa.

Tässä osiossa esittelen, mistä unkarilaisessa matematiikassa on kyse, mikä on Varga-Neményi -opetusmenetelmä ja miten nämä liittyvät toiminnalliseen matematiikkaan.

### 2.3.1 Varga-Neményi -opetusmenetelmä

Opetusmenetelmän perustajina on toiminut Tamás Varga, sekä Eszter C. Neményi. Pirjo Tikkanen [18] kuvaa Varga-Neményi -opetusmenetelmän rakenteen ja toiminnan sisältävän seitsemän pedagogista periaatetta:

1. Todellisuuteen perustuvien kokemusten hankkiminen
2. Abstraktion tie
3. Toimintavälineiden runsas käyttö
4. Laaja ja yhtenäinen käsitteiden pohjustus
5. Lupa erehtyä, väitellä ja iloita
6. Oppilaan kehityksen ja ominaispiirteiden huomioiminen
7. Opettaja ja matematiikan opetus

Risku [17] on myöhemmin esitettävässä listauksessa listannut pedagogiseksi periaatteeksi lisäksi kohtien 4 ja 5 väliin ”Ikään liittyvien erityispiirteiden huomioiminen”. Vaikka periaatteet on listattu erillisiksi, niin käytännössä nämä kietoutuvat opetusmenetelmässä yhteen.

Varga-Neményi -menetelmä on oppilasta ja hänen ajatteluaan kunnioittava tapa opettaa matematiikkaa. [22] Opetusmenetelmässä matematiikkaa opetetaan sekä yksin, että yhdessä näytellen, leikkien, vertaillen, järjestäen, rakentaen, kuunnellen, piirtäen ja katsoen. Tällä tavoin puhutaan ja kirjoitetaan suomen ja matematiikan kieltä samalla oppien keskeiset matematiikan käsitteet. Itse tekemällä myös havainnollistetaan matematiikkaa ja oivaltaminen ja ymmärtäminen johdattavat matemaattisen ajatteluun. Opetusmenetelmässä on tärkeää vaalia ja tukea oppilaan oman osaamisen ja pystymisen tunnetta ja tätä myös vahvistetaan hiljalleen. [22]

Opetusmenetelmä onkin hyvin monipuolinen ja tarvitsee myös monipuolisia toimintamateriaaleja. Välineinä käytetään kouluun hankittuja värisauvoja, loogisia paloja, geolautoja, mutta myös kotoa tuotuja leluja, nappeja ja muita pieniä esineitä. Toki myös oppikirja kulkee opetusmenetelmässä mukana. [22]

Varga-Neményi opetusmenetelmän suomen nettisivuilla myös muistutetaan, että menetelmä ei poista matematiikan oppimisen vaikeuksia kaikilta oppilailta, mutta opetusmenetelmä voi antaa tarkemman kuvan oppilaan osaamisesta ja tarpeista. [22]

Toisaalta opetusmenetelmä vaatii myös opettajalta paljon. Opettajan on hallittava opetettava asia ja ymmärrettävä asian yhteys myöhemmin opetettaviin asioihin. Opettajan tulee osata käyttää myös sellaista matematiikan kieltä, jota oppilas sen hetkisessä kehitysvaiheessaan ymmärtää. Saman aikaisesti opettajan on myös tuettava oppilaita oivaltamaan itse opetettavat asiat. [17]

### 2.3.2 Unkarilainen matematiikan opetus ala-asteella

Suomessa on jo useampia alakouluja, joissa matematiikan opetus perustuu unkarilaiseen matematiikkaan tai tarkemmin Varga-Neményi -opetusmenetelmään, jota esittelin aiemmin. Unkarissa matematiikkaa rakennetaan perustasta alkaen, eli jo esiopetuksesta. [19] Esiopetus ja alkuopetus vaikuttavat voimakkaasti asenteisiin. Unkarissa varmistetaan jo tarhassa tai esiopetuksessa, että koulunsa aloittavilla oppilailla on tarvittavat tiedot ja kyky keskittyä. Tällä tavoin kaikille oppilailla on tietty perustaso. [19]

Myös äidinkieli on tärkeässä osassa matematiikan opetusta ja lapset opetetaan vastaamaan kokonaisin lausein ja kertomaan, miten he päättelevät asioita. Opetuksessa huomioidaan myös oman kulttuurin lorut, sadut ja laulut, tutustutaan luontoon, eläimiin ja ympäristöön. Opetuksessa on mukana päättelytehtäviä, leikkejä ja askartelua alkuopetuksessa ja erilaisia välineitä käytetään myös paljon. Lapset pitävät tällaisesta toiminnasta ja toiminta luo lapsille myös positiivisen kuvan matematiikasta. [19]

Ala-asteella opetuksessa on myös mukana jo myöhemmin opetuksessa vastaan tulevat abstraktit matematiikan käsitteet, kuten funktio, yhtälö, epäyhtälö, lukusuora ja jaollisuus, joita konkretisoidaan apuvälinein ja hauskoin tehtävin. Tällä tavalla käsitteet jäävät myös ”kypsymään”oppilaiden päähän. [19]

Risku [20] on esitellyt unkarilaisvaikutteisen matematiikan opetusta 1.luokalla ja alkuopetuksessa. Hän on luokitellut matematiikan metodologisiksi periaatteiksi kuusi osaa:

1. Todellisuuteen perustuva kokemuksien hankkiminen
2. Abstraktion vaiheittainen eteneminen
3. Apuvälineiden runsas käyttö
4. Laaja ja yhtenäinen matemaattisten käsitteiden pohjustus
5. Ikään liittyvien erityispiirteiden huomioiminen
6. Lupa erehtyä, väitellä ja iloita

Avaan seuraavaksi, mitä eri kohdat merkitsevät.

**"Todellisuuteen perustuva kokemuksien hankkiminen".** Esimerkit ja tehtävät haetaan mahdollisimman läheltä lasten omaa kokemusmaailmaa. Tunneilla on paljon toiminnallisuutta, jota toteutetaan tarttumalla, peittämällä, mittaamalla, punnitsemalla, taputtamalla, tömistämällä, täyttämällä, jne. Esimerkiksi:

> *Etsitään lukua 6. Epäluonnollinen tapa on esimerkiksi värittää kuvasta 6 kukan terälehteä tai värittää kuvan "madosta"6 niveltä; näitä ei esiinnyt todellisuudessa. Sen sijaan voi pohtia, miten eri tavoin voi kolikoista saada 6 markkaa, jotta voisi ostaa sen hintaisen suklaapatukan.* [20]

**"Abstraktion vaiheittainen eteneminen".** Oppilaiden käsitteet muodostuvat vaiheittain kokemukseen perustuen. Ensimmäinen vaihe on asian havainnollistaminen esimerkiksi leikkimällä erilaisia aisteja käyttämällä. Esimerkiksi:

> *Jaetaan luokka/ryhmä kahtia siten, että lapset menevät kahteen jonoon. Tarkistetaan, ovatko ryhmät yhtä suuret ottamalla paria käsistä kiinni. Katsotaan, löytyykö kaikille pari. Tämä toimii johdatuksena "parillinen luku-käsitteeseen.*

Toinen vaihe on asian takeminen välineillä, esimerkiksi tulitikkujen parittaminen kahdesta ryhmästä. Kolmannessa vaiheessa samaa asiaa tutkitaan kuvista. Tämä vaihe on kolmantena, sillä kuva toimii lapselle abstraktiona. [20]

**"Apuvälineiden runsas käyttö".** Unkarilaisessa matematiikassa erilaiset tavat, toiminnalliset menetelmät ja välineet ovat iso osa opetusta. Jokaiselle oppilaalle on oma "työkalupakki", josta löytyy erilaisia tavaroita: nappeja, papuja, erilaisia kortteja, noppia, legoja, askartelutarvikkeita, pelinappuloita, yms. Lisäksi käytetään loogisia paloja ja värillisiä ja eri pituisia sauvoja. [20]

**"Laaja ja yhtenäinen matemaattisten käsitteiden pohjustus".** Matematiikan alat eivät ole rajattuja, vaan samoissa leikeissä voi olla perusteita useilta matematiikan aloilta. Matemaattista ajattelua rakennetaan hiljalleen vankalle pohjalle. [20]

**"Ikään liittyvien erityispiirteiden huomioiminen":**

- Otetaan huomioon oppilaiden fyysiset ja henkiset kyvyt.
- Käytetään sanoja, jotka ovat lapsille tuttuja.
- Huomioidaan lapsen tarkkaavaisuus ja kyky keskittyä.
- Annetaan lasten tehdä itse.
- Tarjotaan kehittäviä tehtäviä, ei "lässytetä". [20]

Ja viimeisenä kohta 6: antaa oppilaille lupa erehtyä, väitellä ja iloita.

### 2.3.3 Miten unkarilainen matematiikan opetus eroaa suomalaisesta?

Matematiikkalehti Solmun artikkelissa on kerrottu unkarilaisen matematiikan didaktikon tohtori Tibor Szalontain näkemyksiä matematiikan osaamisen mittaamisesta, tehokkaasta oppitunnista, oppimisteorioista ja lähestymistavoista matematiikan opetukseen. [23]

Tibor Szalontain mukaan hyvä opetus sisältää interaktiivisuutta ja ongelmanratkaisutehtäviä yksin, ryhmässä tai luokassa ratkaistaviksi. Hän esittelee kymmenen kohtaa tehokkaaseen oppituntiin:

1. Kysymyksen asettaminen ja tehtävän anto, jonka tulisi olla lyhyt ja selkeä. Opettajan on varmistettava, että kaikki ymmärtävät, mitä halutaan.

2. Luokassa kiertely, oppilaat työskentelevät itsenäisesti ja opettaja seuraa työskentelyä. Itsenäinen työ kehittää kirjallisia kykyjä ja lisää ongelmanratkaisutaitoja.

3. Itsenäisen työskentelyn lopettaminen.

4. Yhteiskeskustelu alkaa. Opettaja kehottaa joitain oppilaita selvittämään, miten he ratkaisivat tehtävän. Yhteiskeskustelu kehittää käsitteellistä ajattelua ja kommunikointia. Muiden ideat opitaan hyväksymään ja omat mielipiteet perustelemaan. Kuka on samaa mieltä, eri mieltä?

5. Kerätään ideat ja niiden perustelut. Miksi, miten? Opettaja ei vielä sano, mitkä ovat oikein tai väärin.

6. Opettaja lopettaa keskustelun ja kertoo, mitkä vastaukset ovat oikein tai väärin ja miksi.

7. Palaute. Kuka osasi ratkaista oikein? (Tämä on parempi kysymys, kuin ”osasivatko kaikki ratkaista?”, johon ei saada selkeää vastausta.

8. Virheellisten tai puutteellisten vastausten korjaaminen koulun alaluokilta lähtien, oppilaat itse etsivät virheensä ja korjaavat ne. Yksityiskohtaiseen korjaamiseen ei kuitenkaan tunnilla ole aikaa, vaan se voidaan antaa ylimääräiseksi kotitehtäväksi.

9. Arvioiminen. Oppilaille annetaan tunnustusta hyvistä suorituksista ja ideoista sekä kannustusta.

10. Lopuksi opettaja voi esimerkiksi muuttaa vähän ongelmaa. Voidaan tarkastella erilaisia ratkaisuja, antaa historiallista taustaa ja kirjallisuusviitteitä. ONgelmaa voidaan yleistää ja etsiä analogisia ongelmia. Voidaan myös palata ongelmaan ja keskustella siitä, mistä ratkaisuidea tuli. Miten ajattelimme tehtävää ratkaistessamme?

Tehokas oppitunti ei haaskaa minuuttiakaan, vaan koko oppitunnin ajan keskitytään matematiikaan eriyttäminen huomioiden: yhteiskeskustelu auttaa heikompia oppilaita ja lisäksi tehtävissä on valittaviksi kolme eri tasoa. [23]

Tibor Szalontai esittelee myös erilaisia lähestymistapoja matematiikan opetukseen:

1. Historiallinen lähestymistapa - esim. luku 0 opitaan luonnollisten lukujen jälkeen.
2. Käsitteiden yksinkertaistaminen - opettajan toimesta opetettavalle ikäryhmälle sopivaksi.
3. Strukturaalis-formaalinen lähestymistapa - esim. abstrakti algebra jo varhaisessa vaiheessa.
4. Ongelmalähtöinen lähestymistapa - käytetään "ohjattua uudelleen keksimistä"ja yritetään saada oppilaille "Heureka-elämyksiä usein.
5. Yksilökeskeinen opetustapa - oppilaat työskentelevät yksilöllisesti omien tehtäviensä parissa.
6. Tietokonesuuntautunut lähestymistapa.
7. Sovellussuuntautunut lähestymistapa - projekteina ja pienryhmissä.

Unkarilaisessa opetuksessa on käytössä kaikki nämä lähestymistavat ja lähestymistapoja on hyvä yhdistää toisiinsa. [23]

Pirjo Tikkanen on puolestaan vertaillut väitöskirjassaan suomalaisen matematiikan opetuksen eroja unkarilaiseen Varga-Neményi -opetusmenetelmään. [18] Tikkanen sanoo, että Suomessa matematiikan opetukseen oletetaan olevan oppiskirjasidonnaista. Siinä missä unkarailaiset käyttävät paljon toiminnallisia välineitä, niin myös suomessa toiminnallisest välineet ovat käytössä etenkin esi- ja alkuopetuksessa. Suomessa on myös käytössä erilaisia matematiikan opetusmenetelmiä, kuten ongelmanratkaisu opetusmenetelmänä, tosi-matematiikka eli rakenteellinen matematiikka ja tarinan kerronta.[18] Viime vuosina nousussa on ollut myös yksilöllisen oppimisen menetelmä matematiikan opetuksessa.

Suomalainen matematiikan opetus on usein konstruktivista ja aktiiviseen oppimiskäsitykseen nojaavaa, jota ohjaa opetussuunnitelma. Opettajanoppaissa on ohjeita yksityiskohtaisesti tuntien pitämiseen ja toiminta- ja havainnollistamisvälineiden käyttöä suositellaan auttamaan käsitteiden ymmärtämistä. [18]

Suomalaisissa matematiikan opetusmenetelmissä, opettajanoppaissa ja pedagogisessa kirjallisuudessa on monia yhtäläisyyksiä Varga-Neményi -opetusmenetelmään, kuten oppilaan arkielämän huomiointi, toiminnallisuus, eteneminen konkreettisesta abstraktioon, sisällöt, ongelmanratkaisu, oppilaan kehityksen huomioiminen ja opettajan rooli. Eroavaisuutena puolestaa on se, että Varga-Neményi -opetusmenetelmä on jäsentynyt menetelmäksi Unkarissa aiemmin, kuin Suomessa käytetyt opetusmenetelmät. [18]

Myös etenemisessä konkreettisesta abstraktioon on ero. Unkarilaiset puhuvat abstraktion tiestä, jolla korostetaan abstraktion ja konkreettisen tasa-arvoa. Suomessa puolestaan abstraktio tulee porrasmaisena, jossa alimmalla portaalla on konkretia ja ylimmällä abstraktio. [18]

Aiemmin esitetty Tibor Szalontain tehokkaan tunnin malli poikkeaa myös Suomessa perinteisesti käytössä olevasta oppituntirakenteesta. Suomessa oppitunti etenee usein opettajajohtoisesti ensin kyselemällä ja siitä siirtyen oppikirjan ohjaamaan yksilölliseen työskentelyyn. Unkarissa puolestaan käytetään useita erilaisia toiminnallisia välineitä samalla, kun opettajajohtoinen, ryhmätyöskentely, yksilötyöskentely ja oppilasjohtoinen tyyli vaihtelee tunnin aikana jopa useita kertoja. [18]

Suurin ero Tikkasen mukaan on kuitenkin opetussuunnitelmissa: Suomen opetussuunnitelma 2004 korosti sisältöjä ja niiden arviointia, kun Unkarin opetussuunnitelma 2003 oli kehittämisorientoinut.

## 2.4 Murtolukujen ja desimaalilukujen oppimisvaikeudet

Kirjallisuudesta löytyy useita päätelmiä, että murtolukujen ja desimaalilukujen oppiminen on vaikeaa. Kuten vanha sananlasku kuuluu: "kolmella kahdesta ihmisestä on vaikeuksia murtolukujen kanssa". [25],[26] Murtoluvut on tunnettu jo varhaisista ajoista alkaen, mutta siitä huolimatta murtoluvut aiheuttavat isoja ongelmia matematiikan opiskelussa edelleen tänä päivänä. Jo 4000 vuotta sitten Babylonialaisessa sivilisaatiossa ja Egyptissä käytettiin murtolukuja. [25]

Vuonna 1978 Yhdysvalloissa tehdyssä tutkimuksessa 20 000 kahdeksasluokkalaista (13-14 vuotiaita) sai tehtäväkseen arvioida, mikä kokonaisluku on lähimpänä summaa $\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$.[27] Vastausvaihtoehdot olivat 1, 2, 19, 21 ja en tiedä. Vain 24% oppilaista tiesi oikean vastauksen 2, kun 19 oli yleisin vastaus. Vuonna 1983 tehtiin toinen tutkimus Yhdysvaltojen kahdeksasluokkalaisille, jossa heidän tuli valita kokonaisluku, joka on lähimpänä tuloa $3,04 * 5,3$. Vastausvaihtoehdot olivat 1,6, 16, 160, 1600 ja en tiedä. Vain 21% valitsi oikean vastauksen 16. Suurin osa vastasi 1600.

Näiden tulosten jälkeen Yhdysvalloissa ryhdyttiin toimeen ja alettiin kehittämään murtolukujen ja desimaalilukujen opetuksen ymmärrystä.[27] Vuonna 1978 tehty tutkimus toistettiin uudelleen 36 vuotta myöhemmin vuonna 2014. Tällöin tehtävän oikean vastauksen 2 valitsi 27 % oppilaista. Eli vaikka vuosikymmeniä kului, satoja, jopa tuhansia tutkimuksia tehtiin ja opetuksen kehittämiseen käytettiin miljardeja dollareja, niin silti vain murtolukujen ymmärtämisessä tapahtui vain pientä kehitystä.

Vastaavia tuloksia saatiin Cambridgen Yliopiston tutkimuksessa.[26] Tutkimuksessa näytettiin aikuisille kahta murtolukua, jotka olivat samanarvoisia (kuten $\frac{1}{4}$ ja $\frac{2}{8}$). Vastaajien tehtävänä oli vastata mahdollisimman nopeasti, ovatko näytetyt murtoluvut yhtä suuria. Vain noin puolella kerroista vastattiin oikein.

Yhdysvalloissa suoritetun tutkimuksen tulos oli valtava pettymys, mutta ongelma ei ole vain Yhdysvalloissa.[27] Myös maissa kuten Kiina, joissa on kansainvälisesti vertaillessa huippuosaajia matematiikassa, on vaikeuksia ymmärtää esimerkiksi desimaalien kerto- ja jakolaskuja.

Murtoluvut (ja desimaaliluvut) ovat osa jokapäiväistä elämäämme, esimerkiksi alennuksia laskiessa, reseptiä lukiessa tai karttaa lukiessa.[25] Murtoluvut ovat myös isossa osassa matematiikan opiskelussa, mutta miksi niitä on niin vaikea oppia?

Murtoluvut ovat rationaalilukuja, jotka voidaan määrittää osamääriksi $\frac{a}{b}$, jossa nimittäjä $b \neq 0$.[25] Lapset, jotka eivät ole yleisesti vielä oppineet murtolukuja, uskovat kokonaislukujen laskusääntöjen pätevän kaikille luvuille. Matemaattiselta kannalta on kuitenkin perustavanlaatuisia eroja rationaalilukujen ja kokonaislukujen välillä: esimerkiksi kahden rationaaliluvun välillä on ääretön määrä muita rationaalilukuja, kun kahden peräkkäisen luonnollisen luvun välillä ei ole muita luonnollisia lukuja. Usein tyypillinen virhe on, että osoittaja ja nimittäjä ajatellaan kahdeksi erilliseksi kokonaisluvuksi. Myös laskutoimituksissa on ongelmia, esimerkiksi ajatellaan $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ ja vertailussa voidaan ajatella, että $\frac{1}{5} > \frac{1}{3}$, sillä $5 > 3$. Tämän lisäksi murtolukujen kertominen voi aiheuttaa hämmennystä: kun kaksi kokonaislukua kerrotaan, tulee tulokseksi aina isompi luku. Murtolukujen kertolaskussa tämä ei pideä paikkansa ja esimerkiksi $8 * \frac{1}{4} = 2$.[25]

Myös Lortie-Forgues (et.al) on pohtinut murtolukujen ja desimaalilukujen oppimisvaikeuksiin johtavia syitä.[27] Heidän mukaan ongelman laajuus käsittää seitsemän kohtaa:

1) Murtolukujen ja desimaalilukujen merkintätavat

2) Murtolukujen ja desimaalilukujen suuruusvertailu

3) Murtolukujen ja desimaalilukujen aritmeettisten menetelmien läpinäkyvyys

4) Monimutkaiset suhteet rationaalilukujen ja kokonaislukujen aritmeettisissa menetelmissä

5) Monimutkaiset suhteet rationaalilukujen eri laskutoimitusten välillä aritmeettisissa menetelmissä

6) Vastakkaiset vaikutukset kerrottaessa ja jakaessa positiivisia murtolukuja ja desimaalilukuja alle yhden

7) Pelkkä erillisten osien määrä murtolukujen ja desimaalilukujen aritmeettisissa menetelmissä.

Uskon ja omien kokemusteni perusteella tämä lista pitää paikkansa myös suomessa, kun pohditaan oppimisvaikeuksia murtolukujen ja desimaalilukujen laskutoimituksista. Kuten Gabriel (et.al) totesi: lasten on vaikea ymmärtää kokonaislukujen ja rationaalilukujen laskutoimitusten eroavan toisistaan. Voidaan helposti ajatella, että $\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$, sillä $4 < 8$. Kuitenkin murtoluvuilla toimitus tehdään käänteisesti, eli kokonainen jakautuu sitä pienempiin osiin, mitä isompi nimittäjä on. Samalla tavalla voidaan ajatella, että esimerkiksi yhteenlasku $\frac{2}{4} + \frac{2}{3} = \frac{4}{7}$, sillä $2+2=4$ ja $4+3=7$. Monet varmasti pystyvät kehittämään itselleen erilaisia selviytymisstrategioita, joilla ratkaisevat murtolukuihin liittyvät ongelmat, mutta ilman kunnollista ymmärrystä. Mitä pidemmälle opiskelussa mennään, niin sitä vaikeampi erilaisia miniteorioita ja strategioita on ylläpitää.

## 2.5 Koonti

Murtolukujen ja desimaalilukujen oppimisvaikeuksien laajuus on huolestuttavaa ottaen huomioon, että murtolukuja ja desimaalilukuja tarvitaan hyvin laajasti niin arkielämässä kuin fysiikassa tai kemiassa, matematiikan eri osa-alueilla ja muualla. Tutkijat ovat ympärimaailman pyrkineet löytämään vastauksia näihin ongelmiin jo vuosikymmenien ajan, kuitenkaan suuria tuloksia saavuttamatta. Behavioristisesta opetusmenetelmästä on kuitenkin päästy hiljalleen yli ja ymmärrystä painottava matematiikka ja toiminnallinen matematiikka ovat nousseet yhä isompaan rooliin matematiikan tunneilla. Kenties näillä menetelmillä voitaisiin parantaa oppilaiden ymmärrystä myös murtolukujen ja desimaalilukujen laskutoimitusten käsittelyyn, sekä väliseen yhteyteen.

Unkarilainen matematiikan opetus on loistava esimerkki siitä, että toiminnallinen matematiikka todella toimii. Unkarissa on useita Nobel palkintoja matematiikan tai matematiikkaa vaativilta osa-alueilta ja suhtautuminen matematiikkaan on positiivista. Unkarilaiseen matematiikkaan on alkuopetukseen myös sisäänrakennettu eriyttämisen mahdollisuus

Toiminnallisuus auttaa kaventamaan teorian ja käytännön välistä kuilua. Välineitä käyttämällä matemaattinen ajattelu ja oppiminen kehittyvät, sillä silloin lapset saavat aistihavaintoja, kokemuksia ja mielikuvia. Konkretian tulisi tulla opetuksessa ennen symboleita ja symboleiden vasta konkretian ymmärtämisen jälkeen. [24] Tätä ohjetta juuri unkarilainen matematiikka noudattaa.

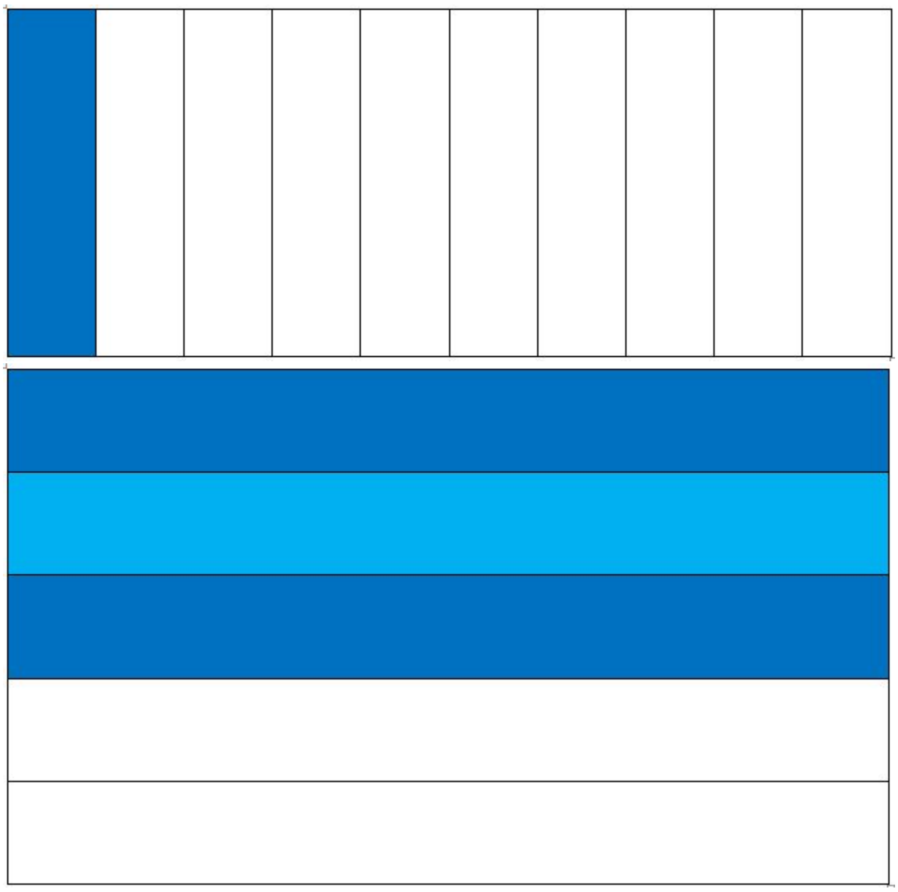
Suomessa matematiikan opetus on edelleen usein hyvinkin opettajajohtoista ja opetussuunnitelmaan nojaavaa. Opetussuunnitelma asettaa melko tiukat rajat opetukselle, jolloin toiminnallisen matematiikan käytölle ei esimerkiksi yläkoulussa ole välttämättä aikaa. Kuitenkin toiminnallisuus parhaimmillaan auttaa oppilasta yksinkertaistamaan matematiikan käsitteitä, selkeyttämään matematiikan ilmiöitä ja tekemään matematiikasta käytännönläheisempää.

Toiminnallisen matematiikan tehtäville on myös kysyntää, vaikka valtavia määriä toiminnallisen matematiikan tehtäviä voikin jo löytää netistä ja opettajanoppaista.

# 3 Murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys opetusmenetelmän esittely

Pro Gradu työni päätavoite oli siis luoda toimiva ja havainnollistava menetelmä murtolukujen ja desimaalilukujen väliseen yhteyteen. Menetelmä on suunniteltu toiminnallista matematiikkaa hyödyntäväksi ja menetelmässä tarvitaan kymmenen sarakkeen ruudukoita, sekä ruudukon ruutuihin mahtuvia noppia, nappeja, puupaloja, karkkia tai mitä vain siirreltävää pientä välineistöä.

Tuottamani menetelmän idea on, että mikä tahansa murtoluku voidaan ratkaista desimaaliluvuksi ilman, että käytetään laskinta. Pohjimmiltaan menetelmä liittyy murtoluvun laventamiseen tai supistamiseen siten, että nimittäjäksi tulee kymmenen pannupizzamallia hyödyntämällä. Ideaan lähdetään tutustumaan yhdistämällä väritettyjen alueiden sisältämiä tietoja toisiinsa:

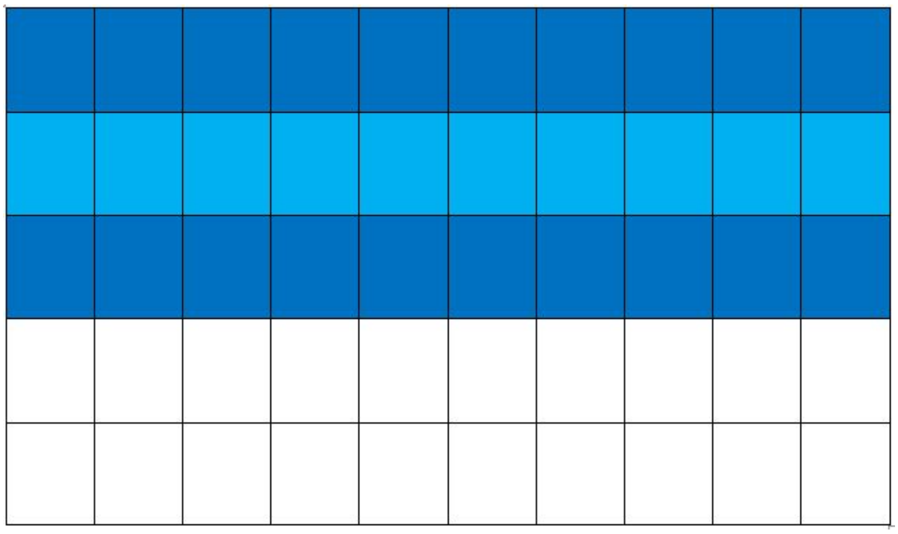


Kuinka suuri osa kuvioista on väritetty murtolukuna ja desimaalilukuna?

Tämäntyylisiä tehtäviä on opeteltu alakoulussa jo paljon, joten oppilaat pystyvät melko helposti kertomaan ylemmässä tapauksessa $\frac{1}{10} = 0,1$ ja alemmassa

$\frac{3}{5}$, mutta desimaaliluvuksi määritteleminen alemmassa tapauksessa on monille haastavampaa. Monet osaavat ratkaista, että $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$, mutta jos tätä ei saada ratkaistua, eikä laskinta ole, niin silloin menetelmäni on hyödyllinen.

Menetelmäni ideana on, että mikä tahansa väritetty murtoluku kuvio voidaan jakaa edelleen kymmeneen sarakkeeseen. Esimerkiksi yllä olevassa $\frac{3}{5}$ esimerkissäni jako kymmeneen sarakkeeseen näyttäisi tältä:



Muutetaan vielä väritetyt ruudut rasteiksi. Vaikka väritettyjen ruutujen tilalla on rasteja, niin edelleen voidaan hahmottaa, että $\frac{3}{5}$ kuviosta on merkitty, sillä kolme riviä viidestä on täynnä rasteja. Nyt rasteja voidaan siirtää vapaasti ruudusta toiseen, sillä rastien määrä on koko ajan sama $\frac{3}{5}$ ruudukon ruutujen määrään suhteutettuna: rastien sijainnilla ruudukossa ei ole väliä, kunhan rasteja on koko ajan $3 * 10 = 30$ kappaletta. Tämä tehdään siten, että täytetään yksi sarake kerrallaan. Merkitsen esimerkkiin punaisella viivalla ne kohdat, joista rasti on alunperin siirretty, sekä punaisella rastilla ne kohdat, johon rasti on siirretty alkuperäisestä tilanteesta:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | X | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | X | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | X | | | | |
| X | X | X | X | X | X | | | | |

Nyt, kun tiedetään ennakkotietojen perusteella, että yksi täysi sarake on $\frac{1}{10} = 0,1$, niin tällöin kuusi täyttä saraketta on $\frac{6}{10} = 0,6$.

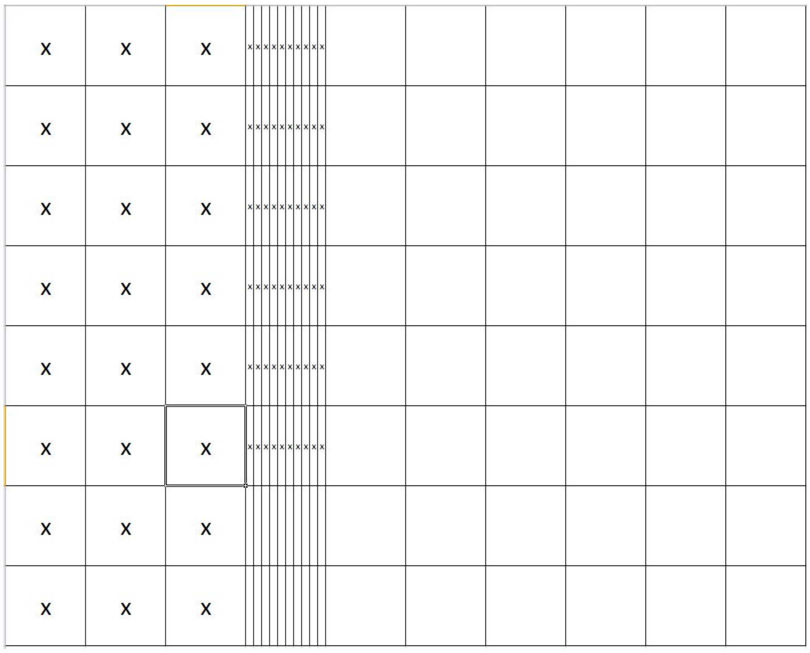
Menetelmä toimii myös haastavammilla murtoluvuilla, kuten $\frac{3}{8}$. Luodaan jälleen kymmenen sarakkeen ruudukko, josta kolme kahdeksasosaa on täytetty rasteilla:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

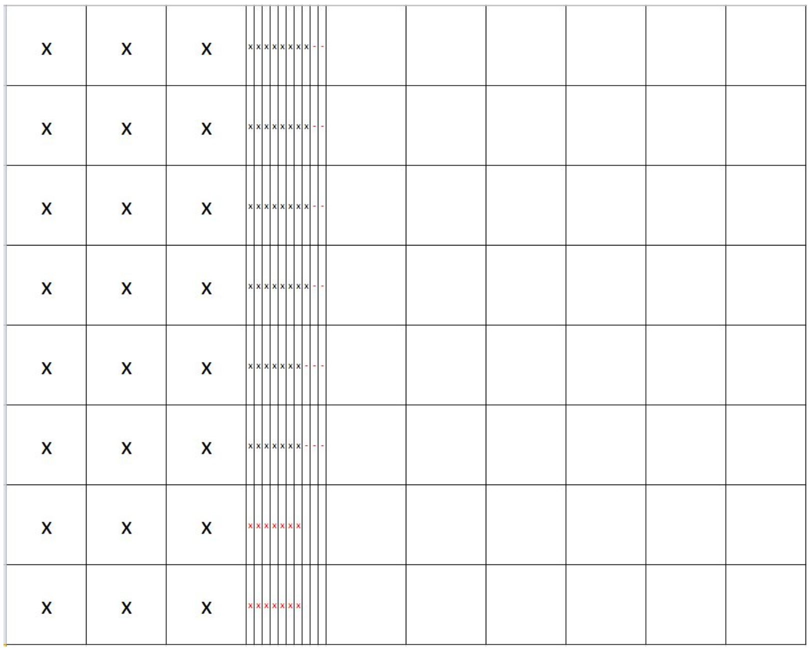
Tehdään jälleen rastien siirtely samalla tavalla, kuin edellisessä esimerkissä:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | - | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | - | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | - | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | | | | | | |
| X | X | X | X | | | | | | |
| X | X | X | X | | | | | | |
| X | X | X | | | | | | | |
| X | X | X | | | | | | | |

Nyt voidaan havaita, että rasteja saatiin siirretty kolmen täyden sarakkeen verran. Näin on oltava $\frac{3}{8} = 0,3...$ ja toisaalta $0,3 > \frac{3}{8} > 0,4$, sillä neljäs sarake ei täyttynyt täysin. Seuraava vaihe on selvittää, kuinka monta sadasosaa jäljelle jääneet rastit sarakkeessa neljä on. Tarkastelussa oleva sarake saadaan muutettua sadasosiksi jakamalla se kymmenellä ja täyttämällä uudelleen jaetun osan kuusi ensimmäistä riviä rasteilla:



Nyt voidaan ratkaista tämän ruudukon sisällä sadasosien osuus vastaavalla rastien siirtelyllä, kuin edellä:



Havaitaan, että sadasosia tarkastellessa seitsemän sadasosasaraketta täyttyi kokonaan, mutta vieläkään ei kaikkia rasteja saatu täyttämään viimeistä saraketta. Näin ollen $\frac{3}{8} = 0,37...$ ja toisaalta $0,37 > \frac{3}{8} > 0,38$, sillä sadasosien kahdeksassarake ei täyttynyt rasteista kokonaan.

Seuraavaksi ongelmassa tulee ratkaista tuhannesosat. Jos käytössä on tarpeeksi iso paperi, niin kahdeksannen sadasosasarakkeen voi jakaa jälleen kymmeneen osaan. Selkeyden vuoksi teen kuitenkin kokonaan uuden $10x8$ ruudukon, joka vastaa tuhannesosien tarkastelua. Kahdeksannessa sadasosasarakkeessa on neljässä ruudussa rasti, joten uudesta ruudukosta tulee neljä riviä täyttää rasteilla:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

Tapauksen $\frac{3}{8}$ tuhannesosien tarkastelu

Siirretään jälleen rasteja vastaavalla tavalla kuin aiemmin:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | | | | | |
| X | X | X | X | X | | | | | |
| X | X | X | X | X | | | | | |
| X | X | X | X | X | | | | | |

Tapauksen $\frac{3}{8}$ tuhannesosien tarkastelu

Tällä kertaa kaikki sarakkeet saatiin täytettyä rasteilla ja kaiken kaikkiaan sarakkeista viisi täyttyi. Näin ollen $\frac{3}{8} = 0,375$.

Menetelmä toimii millä tahansa murtoluvulla, mutta sekaluvuissa tulee ensin ratkaista kokonaisten osuus. On myös syytä muistaa, että kymmenen sarakkeen kuvio jaetaan aina murtoluvun nimittäjän mukaiseen rivimäärään, jotta oikeanlainen ruudukko tutkimiseen saadaan. Rivejä voi olla kuinka monta tahansa, kunhan sarakkeiden määrä pysyy aina kymmenenä. Tällöin pohjimmainen idea on, että ruudukon avulla tehdään laventamista tai supistamista kymmeneen ja samaa voidaan jatkaa aina jakamalla viimeinen rasteista täyttymättä jäävä sarake jälleen kymmeneen osaan siihen asti, kunnes kymmenesosia, sadasosia, tuhannesosia, kymmenestuhannesosia, tms. tutkailtaessa minkään sarakkeen ruutu ei jää ilman rastia.

Itse menetelmää käytettäessä rastien sijaan käytetään konkreettisia tavaroita, kuten noppia, helmiä, tai vastaavia ja näitä konkreettisia tavaroita siirtelemällä tutkitaan annettua murtolukua.

# 4 Kehitetyn opetusmenetelmän tutkimus

Aluksi tuotin tosiaan 45 minuutin pituisen oppituntisuunnitelman menetelmän ym-
pärille, jonka jälkeen kävin toteuttamassa oppitunnin Keravalla Kurkelan koulussa kahdelle seitsemännelle luokalle syksyllä 2017. Oppitunnin lopuksi oppilaat täyttivät palautelomakkeen, jossa oli väitteitä järjestysasteikon mukaisesti asteikolla 1-6, viimeinen kysymys oli vapaa palaute. Lisäksi pyysin oppituntia seuranneita opettajia täyttämään vastaukset viiteen kysymykseen, joista kaksi oli suljettuja kysymyksiä koskien opettajien opetettavia aineita, sekä työhistorian pituutta ja kolme avoimia kysymyksiä koskien menetelmää, tunnin sujumista ja vapaata palautetta.

Tässä osiossa esittelen käyttämäni palautelomakkeet, käyn läpi saamani palautteet, käyn läpi testaamani oppitunnin sujumisen, reflektoin oppituntia ja saamiani palautteita, sekä pohdin tutkimukseni luotettavuutta. Lopuksi esittelen myös kehitysehdotuksia menetelmäni ympärille, sekä oppituntisuunnitelmani parantamiseksi.

## 4.1 Palautelomakkeen esittely

Tein tutkimustani varten kaksi erilaista palautelomaketta: toisen oppilaille ja toisen opettajille.

Oppilaiden palautelomakkeessa minulla oli neljä väitettä, joihin oppilaat saivat vastata järjestysasteikolla 1-6 siten, että 1 oli "Täysin eri mieltä" ja 6 "Täysin samaa mieltä". Valitsin asteikon 1-6, jotta sain oppilailta mielipiteen johonkin suuntaan. Tämän lisäksi oppilaat saivat kirjoittaa vapaan palautteen.

Oppilaiden palautelomakkeeseen valitsin seuraavat väitteet:

- "Mielestäni menetelmä oli hyödyllinen"

- ”Ymmärsin, miten käytetty ruudukko tehtiin annetulla murtoluvulla”
- Ymmärsin, miten murtoluvun saa muutettua desimaaliluvuksi opetetulla menetelmällä”
- ”Tunnilla oli kivaa”

Opettajien palautelomaakkeeseen valitsin sen sijaan kolme avointa ja kaksi suljettua kysymystä, sillä toivoin ja uskoin saavani opettajilta rakentavaa palautetta tällä tavoin paremmin. Lisäksi opettajia oli vain kolme, joten palautteiden läpikäynti oli helppoa.

Opettajien palautelomakkeeseen valitut kysymykset:

- Opetettavat aineet
- Kuinka kauan olet opettanut
- Miten tunti mielestäsi meni? Mitä mieltä olit käytetystä menetelmästä?
- Suosittelisitko tunnila käytettyä menetelmää opetukseen? Miksi / miksi ei?
- Vapaa sana ja palaute

## 4.2 Oppituntisuunnitelman ja näytetunnin toteutus

Kävin pitämässä syksyllä 2017 liitteistä löytyvän oppituntisuunnitelman mukaisen tunnin Keravalla Kurkelan koulussa kahdelle eri 7. luokan ryhmälle. Opetusmenetelmääni testasi kaiken kaikkiaan 46 oppilasta ja opetusmenetelmääni seurasi kolme opettajaa, joista kaksi oli matemaattisten aineiden opettajia ja yksi laaja-alainen erityisopettaja.

Testiryhmäni eivät olleet vielä aloittaneet murtolukujen käsittelyä, joten heidän murtolukujen ja desimaalilukujen osaaminen oli alakoulun pohjatietojen varassa. Oppituntini toimikin näille ryhmille murtolukuosion aloittavana tuntina. Oppilaat eivät myöskään olleet vielä käyttäneet laskinta laskujen ratkaisemiseen, joten näin ollen oppilaat eivät olleet käyttänyt laskinta myöskään murtolukujen desimaaliluvuiksi muuttamiseen.

Oppitunti oli 45 minuutin mittainen ja oppitunnin eri osuudet jakautuivat suurinpiirtein seuraavalla tavalla:

5 min Oppilaisen asettuminen luokkaan

15 min Alustus, murtoluvun $\frac{2}{5}$ ja $\frac{1}{4}$ muuttaminen desimaaliksi menetelmää hyödyntämällä

20 min Oppilaiden itsenäinen tehtävien ratkaiseminen

5 min Palautteen anto

Tunnilla minulla oli mukanani pieniä noppia, jotka toimivat ruudukossa siirtelyapuna. Lisäksi olin tulostanut pienempiä ja isompia 10 sarakkeen taulukoita valmiiksi, jonka oppilaat pystyivät jakamaan riveihin tutkimansa murtoluvun mukaisesti.

Oppilaat työskentelivät pareittain muutamia poikkeuksia lukuunottamatta, joten tällä tavalla tunnista tuli myös yhteistoiminnallinen. Oppilaat saivat myös pohtia vierusparien kanssa ongelmaa.

Toisen vaiheen hoidin siten, että oppilaat saivat itse aikaa pohtia ratkaisua $\frac{1}{4}$ tehtävään. Tämän ratkaisemiseen oli useita erilaisia taktiikoita, kuten kaikkien noppien siirtäminen murtolukukakkumaisesti yhteen nurkkaan ja siitä päättelemällä, että yksi nurkka on sama kuin $0,25$. Tässä tapauksessa alakoulun murtolukukakut olivat selkeästi jääneet mieleen.

Tunnin lopuksi keräsin oppilaiden palautteen liittenä olevan oppilaiden palautelomakkeen avulla, sekä annoin kiitokseksi pienet vaahtokarkkipussit. Alunperin tarkoitukseni oli noppien sijaan siirrellä karkkia, mutta luovuimme tästä ideasta yhteistuumin opettajien kanssa. Näin ollen vaahtokarkit toimivat kiitoksena.

### 4.2.1 Reflektio oppitunneista

Oppituntisuunnitelmani ei mennyt täysin suunnitelmieni mukaan, mutta siitäkin huolimatta tulokset olivat parempia, kuin uskalsin toivoa (kerron tuloksista tarkemmin seuraavassa osiossa). Parannettavaa mielestäni jäi, käyn läpi kehitysehdotuksiani vielä myöhemmin.

Oppilaat järjestelmällisesti ymmärsivät mielestäni murtoluvun muuttamisen desimaaliluvuksi hyvin kymmenesosien kohdalla, mutta sadasosat tuottivat suuria vaikeuksia. Tämä ei oikeastaan haitannut ja sadasosa, sekä tuhannesosa muunnokset toimivatkin lahjakkaampia oppilaita eriyttävänä menetelmänä. Perustaso oli kuitenkin sellainen, että kymmenesosat saatiin opetusmenetelmäni avulla kauttaaltaan ratkaistua myös heikompien oppilaiden kohdalla. Paremmat oppilaat puolestaan saivat ratkaistua sadasosia päättelemällä tai opetusmenetelmäni avulla. Esimerkiksi tapauksessa $\frac{1}{4}$ monet oppilaat tajusivat puolilleen jääneen kolmannen sarakkeen olevan puolet $0,1$:sta, eli $0,05$.

Kokonaisuudessaan oppilaat tuntuivat viihtyvän todella hyvin tunnilla. Oppilaat kuulemani mukaan myös käyttäytyivät selvästi paremmin kuin yleensä, mikä saattoi johtua vieraskoreudesta tai siitä, että tulin koululla piipahtamaan töistäni Tiedekeskus Heurekan työntekijäkyltti kaulassa. Työni Tiedekeskus Heurekalla tuntui vakuuttavan melko monen oppilaista.

Huonoimmat puolet oppitunneissa mielestäni olivat hyvin lyhyt aika, eli 45 minuuttia, sekä tapa selittää sadasosien tarkasteluun siirtymisen. Opin, että ainakin 7. luokkalaisten ja luultavasti alakoululaisten kanssa sadasosat voivat olla haastava käsitellä, joten tämän selittämiseen tarvitaan enemmän aikaa. Mielestäni sadasosat eivät opetusmenetelmässä ole niin kovin haastavia, mutta niiden selittämiseen tarvitaan aikaa, joka minulta testitunneillani vain loppui kesken.

Kaiken kaikkiaan olin kuitenkin tyytyväinen testituntejeni lopputulemaan, mikä näkyi myös saamieni palautteiden korkeassa laadussa. Uskonkin, että opetusmenetelmäni on sellaisenaan valmis paketti opettajalle avuksi murtolukujen ja desimaalilukujen välisen yhteyden opetukseen.

## 4.3 Palautteiden läpikäynti

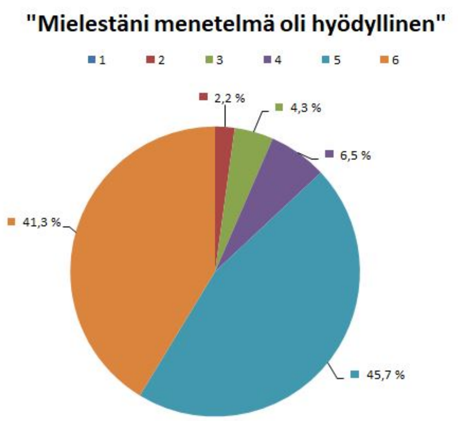
Käyn tässä osiossa ensin oppilaiden palautteet läpi ja sitten opettajien. Lopuksi reflektoin vielä palautteita omiin tuntemukseeni testioppitunneista.

### 4.3.1 Oppilaiden palautteet

Oppilailla oli tosiaan neljä erilaista väitettä, sekä vapaa palaute täytettävinä. Oppilaita kahdessa ryhmässä oli yhteensä 46 ja kaikki oppilaat vastasivat jokaiseen väitteeseen.

Olen laskenut alla oleviin kuvaajiin prosenttiosuudet yhden desimaalin tarkkuudella yksittäisille arvioille asteikolla 1-6. Lisäksi listaan vastausten kokonaismäärän kullekin arviolle, sekä lasken keskiarvon kaikkien vastausten osalta.

**Ensimmäinen väite ”Mielestäni menetelmä oli hyödyllinen”:**



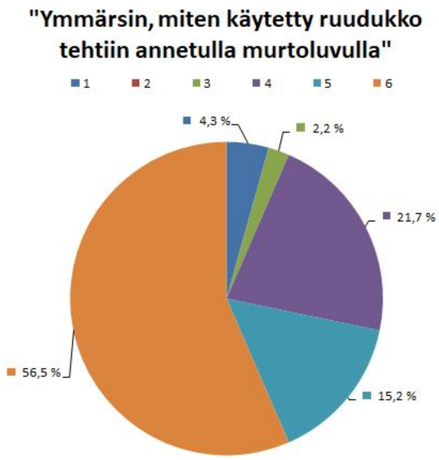

Oppilaista:

- arvion 1 vastasi 0 (0%)
- arvion 2 vastasi 1 $(2,2\%)$
- arvion 3 vastasi 2 $(4,3\%)$
- arvion 4 vastasi 3 $(6,5\%)$
- arvion 5 vastasi 21 $(45,7\%)$

- arvion 6 vastasi 19 (41, 3%)

Kokonaiskeskiarvo väitteelle oli 5, 2.

**Toinen väite "Ymmärsin, miten käytetty ruudukko tehtiin annetulla murtoluvulla":**

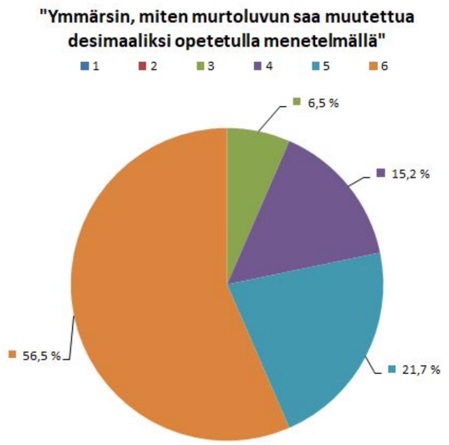



Oppilaista:

- arvion 1 vastasi 2 (4, 3%)
- arvion 2 vastasi 0 (0%)
- arvion 3 vastasi 1 (2, 2%)
- arvion 4 vastasi 10 (21, 7%)
- arvion 5 vastasi 7 (15, 2%)
- arvion 6 vastasi 26 (56, 5%)

Kokonaiskeskiarvo väitteelle oli 5, 1.

**Kolmas väite "Ymmärsin, miten murtoluvun saa muutettua desimaaliksi opetetulla menetelmällä":**

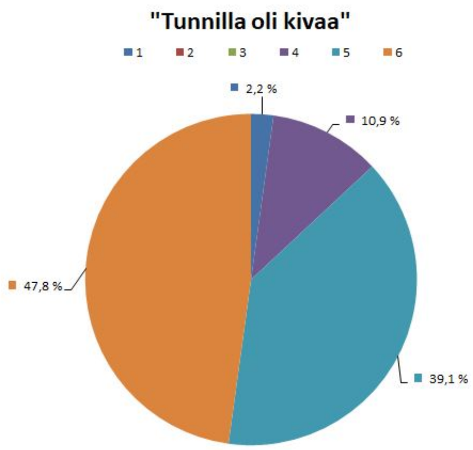



Oppilaista:

- arvion 1 vastasi 0 (0%)
- arvion 2 vastasi 0 (0%)
- arvion 3 vastasi 3 (6, 5%)
- arvion 4 vastasi 7 (15, 2%)
- arvion 5 vastasi 10 (21, 7%)
- arvion 6 vastasi 26 (56, 5%)

Kokonaiskeskiarvo väitteelle oli 5, 3.

**Neljäs väite "Tunnilla oli kivaa":**



Oppilaista:

- arvion 1 vastasi 1 (2,2%)
- arvion 2 vastasi 0 (0%)
- arvion 3 vastasi 0 (0%)
- arvion 4 vastasi 5 (10,9%)
- arvion 5 vastasi 18 (39,1%)
- arvion 6 vastasi 22 (47,8%)

Kokonaiskeskiarvo väitteelle oli 5,3.

Oppilaista 29 vastasi myös avoimeen palautteeseen. Avoimista palautteista 11:ssa kiiteltiin kivasta tunnista, neljässä kehuttiin kivaa opettajaa ja kolmessa mainittiin tunnilla käytetyt kivat nopat tai lopputunnista saatu karkki.

Muutama palaute kuitenkin mainitsi itse menetelmän ja sen vaikutuksen oppimiseen:

- "Hyviä karkkeja, söpöjä noppia ja hyvä menetelmä"
- "Noppien kanssa havainnollistaminen oli kivaa."
- "Oli hauskaa oppia eri tavalla, kuin yleensä"
- "Se oli hyvä menetelmä"
- "Useammin tällaisia tunteja"
- "Minusta menetelmä oli hyvä, helppo ja helppo oppia"
- "Pystyin kerrankin keskittymään. Oli kiva tunti."
- "Ymmärsin ihan hyvin tämän menetelmän avulla."

### 4.3.2 Opettajien palautteet

Opettajien palautteeseen vastasi kolme opettajaa, joista käytän palautteiden läpikäynnissä merkintöjä A, B ja C. Opettaja A on kemian ja matematiikan opettaja, joka on opettanut vuoden ajan. Opettaja B on matematiikan ja fysiikan opettaja, joka on opettanut viisi vuotta. Opettaja C on puolestaan laaja-alainen erityisopettaja, joka on opettanut yli 20 vuotta.

**Kysymykseen "Miten tunti mielestäsi meni? Mitä mieltä olit käytetystä menetelmästä?"opettajat vastasivat seuraavasti:**

A "Tunti oli onnistunut, sait oppilaat hyvin motivoitua työskentelyyn (kuuntelivat erittäin keskittyneenä). Menetelmä oli varmasti hyville laskijoille havainnollinen. Kiva, kun oli huomioitu kaikentasoiset oppilaat!"

B "Oppilaat keskittyivät hyvin yhteiseen osuuteen, koska se oli selkeä ja eteni sopivaa vauhtia. Esimerkit olivat sopivan tasoisia ja ohjeistus selkeä. Oli mukavaa, että oppilaat pystyivät tekemään töitä omalla tasollaan."

C "Tunti meni varsin mukavasti. Pari työskentelyn idea oli sinällään hyvä, eikä sinun vikasi ollut se, että oppilaiden yhteistyötaidot olivat niin heikot, ettei parityöskentely moniltakaan onnistunut. Sadasosien osalta taisi jäädä epäselväksi!"

**Kysymykseen "Suosittelisitko tunnilla käytettyä menetelmää opetukseen? Miksi / miksi ei?"opettajat vastasivat seuraavasti:**

A "Kyllä voisin hyödyntää. Tämä sopisi varsinkin prosenttilaskennan yhteyteen. Toiminnallisia tunteja kaipaisi enemmän, mutta OPS ei jätä pahemmin tilaa niille."

B "Ehdottomasti, aion itse hyödyntää sitä jatkossa. Menetelmän etuja on konkreettisuus ja yksinkertaisuus. Idean opittuaan oppilaiden on helppo edetä itsenäisemmin."

C "Menetelmä oli mainio havainnollistamaan murtoluvun ja desimaaliluvun yhteyttä ja muuntoa. Käyttäisin kyllä, mutta taitaisin antaa jokaiselle omat välineet."

**Kohtaan "Vapaa sana ja palaute"opettajat vastasivat seuraavasti:**

A "Kiitos vierailusta! Menetelmän avulla voisi melkeinpä kokonaan opettaa murtoluvun ja desimaaliluvun välisen yhteyden. Ohjeesi oli niin hyvä, että sen kanssa voisi koska tahansa käydä vetämässä oppitunnin. Oli ilo nähdä, kuinka työrauhaltaan haastava ryhmä oli niin keskittynyt! Tsemppiä!"

B "Oli tosi mukavaa, että tulit vierailulle! Oppilaatkin selvästi tykkäsivät, kun oli vaihtelua tunnissa. On aina ilon aihe, kun löytyy yläkoulun matematiikkaan toiminnallisia ja toimivia menetelmiä, niitä ei liikaa ole koskaan tarjolla. Tsemppiä opintojen loppurutistukseen!"

C "Matematiikassa tarvitaan havainnollistamiseen ja toiminnalliseen toimintaan kehittäjiä ja kouluttajia. Kannustan sinua kovasti Hannele Ikäheimon ja Eija Voutilaisen jalanjäljille. Kiitos oppitunnista ja tsemppiä graduun!"

### 4.3.3 Reflektio palautteista

Oppilaiden, sekä opettajien palautteet olivat lopulta paremmat kuin omat tuntemukseni antoivat ymmärtää. Pieni ristiriita oppilaiden palautteissa mielestäni oli kahdella oppilaalla, jotka vastasivat olleensa täysin eri mieltä väitteen "Ymmärsin, miten käytetty ruudukko tehtiin annetulla murtoluvulla", mutta toisaalta nämä oppilaat vastasivat arvion 3 väitteeseen "Ymmärsin, miten murtoluvun saa muutettua desimaaliksi opetetulla menetelmällä". Toisaalta on hyvinkin mahdollista, että oppilaat eivät täysin tajunneet rivien taulukon rivien määrän olevan sama, kuin murtoluvun nimittäjän arvon, mutta toisaalta ymmärsivät yhden sarakkeen vastaavan desimaalia $0,1$.

Itselleni jäi myös tunne, että oppilaat eivät tuossa ajassa ymmärtäneet opetusmenetelmääni erityisen hyvin. Kuitenkin palautteet oppilaiden ja opettajien osalta antoivat ymmärtää toisin. Näiden palautteiden osalta siis uskaltaisin sanoa, että opetusmenetelmä on omiaan havainnollistamaan murtolukujen ja desimaalilukujen välistä yhteyttä.

Muuten oppilailta saamani palautteet vastasivat omia tuntemuksiani.

Opettajien palautteista olen ehdottomasti samaa mieltä. Menetelmäni on omiaan eriyttämiseen, sillä oppilaat voivat valita tasolleen sopivan murtoluvun tarkasteluun. Kuitenkin parityöskentelynä menetelmä oli hieman haastava etenkin toisen ryhmän kanssa, kuten erityisopettajakin huomautti. Kuitenkin toisen ryhmän kanssa parityöskentely toimi erittäin hyvin.

Oppilaat myös selvästi pitivät tunnista, mikä luultavasti johtui sen poikkeavuudesta muihin matematiikan tunteihin nähden. Toiminnallinen matematiikka käsitysteni mukaan parhaimmillaan auttaa motivoimaan oppilaita matematiikan opetuksessa, sillä toiminallisilla menetelmillä voidaan tuoda oppilasta lähemmäksi matematiikan ymmärtämistä. Näin tuntui myös käyvän menetelmäni kohdalla, mitä myös opettajien palautteet vahvistivat.

## 4.4 Tutkimuksen luotettavuus

Oppitunnin testaaminen tehtiin hyvin pienelle otokselle, eli vain 46 oppilaalle ja kolmelle opettajalle. Luotettavamman tuloksen opetusmenetelmästä olisi saanut, jos oppituntia olisi testannut useammalle ryhmälle eri luokka-asteille ja useamman eri opettajan seuratessa.

Kuitenkin mielestäni pienestä otoksesta huolimatta kohderyhmäni oli juuri oikea, sillä 7.luokan matematiikan isoimpia osa-alueita on murtoluvut. Toisaalta saamani palautteet muodostivat myös melko tasaisen tuloksen, oppilaille annettujen väitteiden keskiarvot olivat kaikkien väitteiden osalta välillä $5,1 - 5,3$. Myös opettajien itsenäisesti antamat palautteet noudattivat hyvin samanlaista linjaa.

Kaiken kaikkiaan pitämäni oppitunnin ja saamieni palautteiden pohjalta uskallan sanoa, että kehittämäni opetusmenetelmä on hyvä ja omiaan havainnollistamaan murtolukujen ja desimaalilukujen välistä yhteyttä. Tätä vahvistaa erityisesti viisi vuotta matematiikan opettajana toimineelta opettajalta saamani palaute, sillä hän pyrkii käyttämään opetuksessaan paljon erilaisia toiminnallisia menetelmiä. Suosittelisinkin palautteeseen vastanneiden opettajien tapaan opetusmenetelmäni käyttöä opettajille.

## 4.5 Kehitysehdotukset

Oppituntisuunnitelmassani oppitunti aloitettiin käymällä läpi valmiiksi määrättyjä kuvioita ja määrittämällä, kuinka suuri osa kuviosta on rastittu. Oppitunnin voisi kuitenkin aloittaa myös kyselemällä oppilailta erilaisia murtolukuja. Kun murtolukuja on taululla, niin voidaan kysyä, kuinka moni osaa ratkaista taululla olevat murtoluvut desimaaleiksi. Osan oppilaat saattavat pystyä päässään ratkomaan, mutta taululla olisi luultavasti myös haastavampia murtolukuja, kuten $\frac{1}{7}$, jota ei pystykään niin helposti ratkomaan. Tällöin opettaja voi kertoa, että seuraavaksi opetellaan menetelmä, jolla voi ratkaista minkä tahansa taululla olevista murtoluvuista desimaaliluvuksi ja tämän jälkeen lähteä käymään läpi oppituntisuunnitelman mukaisia esimerkkejä.

Mielestäni myös vuoden opettajana toimineen huomio menetelmän soveltuvuudesta 8.luokalle prosenttilaskennan yhteyteen oli hyvä. Menetelmää voisikin siis käyttää siellä, jolloin muunnettaisiin murtoluku ensin desimaaliluvuksi ja siitä vielä prosenttiluvuksi. Samalla tavalla myös alakoulussa voisi käyttää menetelmää prosenttilaskennan yhteydessä.

Kolmas juttu, millä kehittäisin oppituntisuunnitelmaa, on parityöskentelyn poisto ja antaisinkin välineet kullekin oppilaalle omaksi. Oppilaat voisivat keskustella keskenään, mutta ratkaisuja tehtäisiin silti itsenäisesti. Myös aikataulua lisäisin, eli käyttäisin opetusmenetelmään 75 minuuttia tai 2 kertaa 45 minuutin oppitunnin verran.

### 4.5.1 Ohjelmointiversio opetusmenetelmästä

Osallistuin keväällä 2017 Helsingin yliopiston matematiikan laitoksen kurssille "Ohjelmointia matematiikan opetuksessa". Tällä kurssilla osana kurssitehtävää kehitin opetusmenetelmästäni ohjelmointiversion. Ohjelmointiversio kuului osana tuntiin, jossa tutustuttii murtolukujen ja desimaalilukujen väliseen yhteyteen. Tunnin rakenne suunniteltiin seuraavanlaiseksi:

1. (*20 min*) Tutustutaan murtolukujen muuttamiseen desimaalilukuihin opettamalla laventamaan/supistamaan murtoluku kymmenesosiin, sadasosiin, tuhannesosiin, kymmenestuhannesosiin, jne. riippuen siitä, mihin kyseinen murtoluku lavenee/supistuu. Esimerkiksi:

   a) $\frac{2}{4} = \frac{25}{100}$ja näin tiedetään, että murtoluku on desimaalilukuna $0,25$
   b $\frac{4}{20} = 2/10$ ja näin ollen desimaalilukuna $0,2$.

   Lisäksi opetetaan menetelmä toiseen suuntaan, eli jos desimaaliluku ulottuu kymmenesosiin asti, niin murtoluvussa jakaja on 10. Jos desimaaliluku ulottuu sadasosiin, niin murtoluvussa jakaja on 100, jne. Esimerkiksi:

   a) $0,11 = \frac{11}{100}$
   b) $0,4 = \frac{4}{10}$
   c) $0,3333 = \frac{3333}{10000}$
   d) $1,25 = \frac{125}{100}$

   **Huomio:** Oppilaat voi opettaa tarkistamaan, millä luvulla tulee laventaa/supistaa siten, että jakajan jakaa 10:llä, 100:lla, 1000:lla tai jollain muulla. Mikäli vastaus on kokonaisluku, tehdään vastauksella lavennus.

2. (*30 min*) Seuraavaksi opetetaan oppilaat ratkaisemaan gradutyöni opetusmenetelmän mukaisesti erilaisia murtolukuja desimaaliluvuiksi ilman laskinta .

3. (*loppu käytettävissä olevasta ajasta*) Scratch-ohjelmointi: taitavat voivat ohjelmoida itse seuraavan ruudukkopelin:
*<https://scratch.mit.edu/projects/155356901/>*
Heikommat voivat puolestaan jatkaa murtolukujen ratkaisemista ilman ohjelmointia tai he voivat pelata valmista "murtolukujen muutto desimaaliluvuiksi" peliä:
*<https://scratch.mit.edu/projects/155637529/>*

Ohjeet molempien pelien luomiseen löytyy alempana liitteistä.

Ohjelmointiversioita opetusmenetelmästäni ei ole testattu millään tavoin, joten tämän toimivuudesta ei ole tuloksia.

# 5 Lähdeluettelo

## Viitteet


[1] Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., Tapiainen T.: Tuhattaituri 3b, 1.-2.painos, Otavan kirjapaino Oy, 2016

[2] Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., Tapiainen T.: Tuhattaituri 4b, 1.painos, Otavan kirjapaino Oy, 2016

[3] Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., Vehmas, P.: Tuhattaituri 5b, 1.painos, Otavan kirjapaino Oy, 2011

[4] Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., Vehmas, P.: Tuhattaituri 6b, 2.painos, Otavan kirjapaino Oy, 2012

[5] Malinen, K., Pietiläinen, J., Pitkänen, T., Rantanen, M., Sihvonen, E.: Pointti 1 Yläkoulun matematiikka, 1.painos, Sanoma Pro Oy, 2012

[6] Hassinen, S., Latva, O., Makkonen, J., Peltola, M., Pirttimaa, M., Tolvanen, A: Kuutio 7, 9.-10.painos, Sanoma Pro Oy, 2016

[7] Opetushallitus: Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, 4.painos, Next Print Oy, 2016

[8] Laitila, Hanna (2003). Murtoluvut peruskoulun yläluokkien matematiikassa. Matematiikkalehti Solmu, verkkomateriaali 2003. <*https://matematiikkalehtisolmu.fi/2003/unkari/murtoluvut/*> Luettu 25.3.2018.

[9] Milla Ristiluoma (2017). Murtolukujen opetus toiminnallisesti -opetuskokeilu peltipizzamallilla. Pro gradu tutkielma, Helsingin Yliopisto 2017. <*https://helda.helsinki.fi/handle/10138/230940*>

[10] Tynjälä, Päivi (1999). Oppiminen tiedon rakentamisena: Konstruktivisen oppimiskäsityksen perusteita, 1.-2.painos, Tammer-paino Oy, 2000

[11] Näveri, Liisa (2009). Aritmetiikasta algebraan: Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana, Yliopistopaino, 2009

[12] Kurki M., Mäki-Komsi S.: Oppiminen tietokoneavusteisessa oppimisympäristössä, 1996 <*http://matwww.ee.tut.fi/kamu/julkaisut/raportit/oppimi.htm*> Luettu 1.2.2018.

[13] Patrikainen, R.: Opettajuuden laatu: Ihmiskäsitys, tiedonkäsitys ja oppimiskäsitys opettajan pedagogisessa ajattelussa ja toiminnassa, Gummerus kirjapaino Oy, 1999

[14] Tall, David (2004). Thinking through three worlds of mathematics. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 28:4, s. 281-288. <*http://www.emis.ams.org/proceedings/PME28/RR/RR213_Tall.pdf*> Luettu 18.2.2018.

[15] Oikkonen, Juha (2004). Maailma ja maailmankuva, osa 1: Matematiikka. Haastattelu, H. Reime, Yleisradio, Maailma ja maailmankuva. <*http://www.lausti.com/articles/maailmankuva/maailmankuva1.html*> Luettu 18.2.2018

[16] Hannula, Jani (2014). Matematiikan kuusi osaa: David Tallin matematiikan kolmen maailman viitekehyksen laajentaminen Juha Oikkosen matematiikan kaksilla kasvoilla. LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education 2:1, s. 59-67 <*https://www.lumat.fi/index.php/lumat-old/article/view/148*> Luettu 13.3.2018.

[17] Risku, Anna-Maija (2001). Laskuoppia vai matematiikkaa? Unkarilainen Varga-menetelmä matematiikan alkuopetuksessa. Verkkomateriaali Jyväskylän yliopisto <*https://www.jyu.fi/tdk/kastdk/tutkijakoulu/seminaarit/kotimaiset/risku.html*> Luettu 14.3.2018.

[18] Tikkanen, Pirjo (2008). ”Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin”: matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana, Jyväskylä University Printing House, 2008

[19] Näätänen, Marjatta (2001). Unkarilaisesta matematiikan opetuksesta Suomessa ja Englannissa. Matematiikkalehti Solmu 2001:2, s. 14-19 <*https://matematiikkalehtisolmu.fi/2001/2/naatanen1.html*> Luettu 12.3.2018.

[20] Risku, A., Hirsilä, M., Tikkanen, P. (2000). Unkarilaisvaikuitteinen matematiikan opetus (1.luokka). Matematiikkalehti Solmu verkkomateriaali <*https://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/alkuopetus/amr.html*> Luettu 13.3.2018.

[21] Näätänen, Marjatta (2000). Vaikutteita opetukseen Unkarista. Matematiikkalehti Solmu 2000-2001:2. <*https://matematiikkalehtisolmu.fi/2000/3/solmu15.pdf*> Luettu 12.3.2018.

[22] Varga-Neményi Ry (2018). Varga-Neményi -menetelmä. Verkkosivusto. <*https://varganemenyi.fi/menetelma/tietoa-menetelmasta/varga-nemenyi-menetelma/30-varga-nem-nyi-menetelma*> Luettu 13.3.2018.

[23] Szalontai, Tibor (2002). Kurssi unkarilaisesta matematiikan opetustyylistä, luento 1: Matematiikan opettamisesta. Matematiikkalehti Solmu, verkkomateriaali 2002. <*https://matematiikkalehtisolmu.fi/2002/unkari/luento1a.html*> Luettu 13.3.2018.

[24] Kiviranta, Leena (2010). "Ehkä hieman erilainen Intia": Toiminnallinen oppiminen ja opettajuus Suomessa ja Intiassa. Pro Gradu tutkielma, Jyväskylän yliopisto 2010. <*https://jyx.jyu.fi/dspace/bitstream/handle/123456789/42268/URN%3aNBN%3afi%3ajyu-201310022398.pdf?sequence=1*>. Luettu 22.3.2018.

[25] Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. Frotiers in Psychology 4:715. <*https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3794363/*> Luettu 18.5.2018.

[26] "What Makes Learning Fractions So Hard? (part1)"University of Cambridge: Centre for Neuroscience in Education. Verkkosivusto. <*https://www.cne.psychol.cam.ac.uk/math-memory/what-makes-learning-fractions-so-hard-part-1*> Luettu 20.5.2018

[27] Lortie-Forgues, H., Tian, J., Siegler, R. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? Elsevier 38(2015), s.201-221. <*https://pdfs.semanticscholar.org/5110/6372b5958be0b2dd71acde79495745a4f230.pdf*> Luettu 18.5.2018

# 6 Kuvalähdeluettelo

## Viitteet

[1] Kuvio 1: Hannulan esittelemä summakaava Tallin ilmenevässä maailmassa: Hannula, Jani (2014). Matematiikan kuusi osaa: David Tallin matematiikan kolmen maailman viitekehyksen laajentaminen Juha Oikkosen matematiikan kaksilla kasvoilla. LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education 2:1, s. 59-67 <*https://www.lumat.fi/index.php/lumat-old/article/view/148*>

[2] Kuvio 2: Hannulan esittämä kuuden osan matematiikan viitekehys: Hannula, Jani (2014). Matematiikan kuusi osaa: David Tallin matematiikan kolmen maailman viitekehyksen laajentaminen Juha Oikkosen matematiikan kaksilla kasvoilla. LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education 2:1, s. 59-67 <*https://www.lumat.fi/index.php/lumat-old/article/view/148*>

# 7 Liitteet

## 7.1 Oppituntisuunnitelma

**Avainsanat:** murtoluvut, desimaaliluvut, murtolukujen ja desimaalilukujen välinen yhteys
**Luokkataso:** 5.-9.lk
**Välineet:** paperia tai kartonkia, helmiä tai karkkia, viivoitin, kynä
**Kuvaus:** Toiminnallinen menetelmä, jolla oppii ratkaisemaan murtoluvun kuin murtoluvun ilman laskinta.
**Kesto:** 45min
**Ennakkotiedot:** Murtoluvun ja desimaaliluvun käsite, ala-asteen pohjatiedot murtolukujen ja desimaalilukujen välisestä yhteydestä

**Ohjeet:** Tunti on hyvä aloittaa muistuttelulla murtolukujen ja desimaalilukujen välisestä yhteydestä. Moni luultavasti tietää, mitä on $\frac{1}{2}$ tai $\frac{1}{10}$ desimaalilukuna, mutta ei paljon $\frac{3}{4}$ on tai $\frac{1}{3}$. Tämän pelin jälkeen oppilaat kuitenkin oppivat keinon, jolla voidaan ratkaista mikä tahansa murtoluku ilman laskinta.

Aloitetaan tunti seuraavilla kuvilla:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | | | | | | | | |

Kuinka suuri osa ruudukosta on rastittu murtolukuna ja desimaalilukuna? $\frac{1}{10}$, eli $0,1$.

| | |
|---|---|
| X | |

Entä nyt? $\frac{1}{2}$, eli $0,5$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| | | | | | | | | | |

Entä nyt? Tämä voi olla jo hieman hankalampi. Monet luultavasti hahmottavat, että ruuduista puolet on rastittu, joten vastauksen on oltava jälleen $\frac{1}{2} = 0,5$. Jos hahmottaminen on kuitenkin vaikeaa, niin voidaan rasteja siirtelemällä ratkaista ongelma.

Ensinnäkin tiedetään, että $\frac{1}{10}$, eli $0,1$ on seuraavat tapaukset:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | | | | | | | | |
| X | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | | | | | | | | |
| X | | | | | | | | | |
| X | | | | | | | | | |

Toisin sanoen, vaikka taulukossa olisi kuinka monta tahansa riviä, niin mikäli sarakkeita on 10 kappaletta, on aina yksi täysinäinen sarake $\frac{1}{10}$, eli $0,1$ riippumatta siitä, kuinka monta ruutua sarakkeeseen kuuluu. Hyödynnetään tietoa uudelleen $10x2$ taulukossa:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| | | | | | | | | | |

Halutaan siis selvittää, mikä rastitettujen ruutujen osuus on koko kuviosta. Tiedetään, että yksi täyttynyt sarake on aina $0,1$. Katsotaan, monta saraketta saadaan täytettyä siirtelemällä rasteja vasemmalta alkaen aina tyhjiin ruutuihin:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | | | | | |

Nyt taulukossa on merkitty punaisella viivalla poistuneiden rastien kohdat ja punaisella X:llä kohdat, johon rastit siirrettiin. Huomataan, että kuviosta täyttyy 5 saraketta. Kun tiedetään yhden sarakkeen olevan $0,1$, niin on 5 täyttä saraketta $5 * 0,1$ tai $0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1$, eli $0,5$.

Siirrytään hieman vaikeampaa seuraavaksi, eli $\frac{2}{5}$. Muodostuva taulukko koostetaan aina 10 sarakkeessa, jossa on annetun murtoluvun nimittäjän verran rivejä. Riveistä puolestaan rastitaan osoittajan verran. Toisin sanoen tapauksessa $\frac{2}{5}$ muodostetaan $10x5$ ruudukko, joista 2 riviä rastitaan:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

Siirrellään jälleen rasteja samalla tavoin kuin edellisessä esimerkissä desimaaliluvun ratkaisemiseksi:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | - | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | - | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | | | | | | |
| X | X | X | X | | | | | | |
| X | X | X | X | | | | | | |

Rasteista muodostui 4 täyttä saraketta, joten $\frac{2}{5} = 0,4$.

Nyt ollaan opittu ratkaisutapa kymmenesosa desimaalilukuihin, mutta mitä jos murtoluku muodostaakin sadasosia? Tarkastellaan tapaus $\frac{1}{4}$:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

Toimitaan jälleen aiemmin opitun mukaisesti, eli siirretään rasteja.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | - | - | - | - | - | - | - |
| X | X | X | | | | | | | |
| X | X | | | | | | | | |
| X | X | | | | | | | | |

Huomataan, että saadaan kaksi täyttä saraketta, mutta jäljelle jää silti rasteja myös kolmanteen sarakkeeseen. Tiedetään, että vastaus on $0,2\ldots$ jotakin. Selvitetään seuraavaksi muodostuvan desimaaliluvun sadasosat. Koska kolmas sarake ei täyttynyt, on sadasosia oltava nollan ja $0,1$ välillä. Olemme kiinnostuneita ainoastaan kolmannesta sarakkeesta, joka voidaan jakaa sadasosien tutkimista varten kymmeneen osaan. Kolmas sarake sadasosien tutkimisessa näyttääkin seuraavalta:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

Sadasosat

Jako voitaisiin tehdä myös suoraan edelliseen ruudukkoon, jolloin kolmas sarake jaettaisiin vain kymmeneen osaan. Ruudukosta voi tulla kuitenkin tällöin hyvin epäselvä, jonka vuoksi voi yhtä hyvin käyttää uutta $10x4$ ruudukkoa sadasosien tarkasteluun.

Tehdään jälleen totuttu rastien siirtely:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | | | | | |
| X | X | X | X | X | | | | | |

Sadasosat

Saadaan viisi täyttä saraketta. Kun yksi sarake on aina $0,01$, niin on sadasosien määrä tällöin $0,05$. Lisätään tämä tulos kymmenesosien kohdalla saatuun $0,2$ osuuteen, eli $0,2 + 0,05 = 0,25$.

Otetaan lopuksi vaikeampi murtoluku, kuten $\frac{3}{7}$. Selvitetään ensin kymmenesosat:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

Kymmenesosat

Siirretään jälleen totutusti rasteja:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | - | - | - | - | - | - |
| X | X | X | X | | | | | | |
| X | X | X | X | | | | | | |
| X | X | X | X | | | | | | |
| X | X | X | X | | | | | | |

Kymmenesosat

Kymmenesosien määrä on siis $0,4$. Selvitetään seuraavaksi sadasosat $\frac{2}{70}$:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

Sadasosat

Tehdään jälleen rastien siirrot:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | - | - | - | - | - | - | - |
| X | X | X | - | - | - | - | - | - | - |
| X | X | X | | | | | | | |
| X | X | X | | | | | | | |
| X | X | X | | | | | | | |
| X | X | X | | | | | | | |
| X | X | | | | | | | | |

Sadasosat

Sadasosien osuus on siis $0,02$. Selvitetään, paljon jäljelle jääneet tuhannesosat, eli $\frac{6}{700}$ on. Tästä eteenpäin merkitsen valmiiksi viivat niihin kohtiin, joissa rastit alunperin oli ja punaisella ne rastit, jotka viivojen kohdalta on siirtynyt pois.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | - |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | - |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | - |
| X | X | X | X | X | X | X | X | X | - |
| X | X | X | X | X | X | X | X | - | - |
| X | X | X | X | X | X | X | X | - | - |
| X | X | X | X | X | X | X | X | - | |

Tuhannesosat

Tuhannesosat ovat siis $0,008$. Murtoluku näyttää loputtomalta, mutta selvitetään vielä kymmenestuhannesosat, eli $\frac{4}{7000}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | X | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | X | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | X | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | X | - | - | - | - |
| X | X | X | X | X | X | | | | |
| X | X | X | X | X | | | | | |
| X | X | X | X | X | | | | | |

Kymmenestuhannesosat

Eli kymmenestuhannesosat ovat $0,0005$. Jätetään osien selvittely tähän ja lasketaan tähän mennessä saadut kymmenesosat, sadasosat, tuhannesosat ja kymmenestuhannesosat yhteen: $0,4+0,02+0,008+0,0005=0,4285\ldots$ Tässä kohtaa voidaan tarkistaa laskimella, paljon $\frac{3}{7}$ on. Laskin antaa tulokseksi $0,42857142857142857...$, joten käytetty menetelmä toimii hyvin.

### Huomioita

Tällä menetelmällä voidaan siis ratkaista murtoluku kuin murtoluku desimaaliluvuksi. Käytännöllisin menetelmä on silloin, kun murtoluvun nimittäjä on sopivan pieni: 35 rivistä murtolukua on todella työlästä käsitellä tällä menetelmällä.

Mikäli murtoluvun osoittaja on nimittäjää suurempi, on ensimmäiseksi selvitettävä kokonaisten määrä. Esimerkiksi tapauksessa $\frac{10}{4}$ huomataan ensin, että nimittäjä menee osoittajaan kahdesti, joten vastaus desimaalilukuna $2,...$ jotain. Jäljelle jäävä tutkittava murtoluku on $\frac{2}{4}$, joka opittua menetelmä käyttäen on $0,5$. Toisin sanoen $\frac{10}{4}=2+0,5=2,5$.

Menetelmän ideana on käyttää siirrettäviä tavaroita, kuten helmiä ohjeessa annettujen rastien siirtelyjen sijasta.

## 7.2 Kyselylomake oppilaille

**Kyselylomake**

Ympyröi väittämistä se numero, joka vastaa kokemustasi parhaiten välillä 1-6, kun kyselyssä 1 merkitsee täysin erimieltä ja 6 täysin samaa mieltä.

Mielestäni menetelmä oli hyödyllinen

1____________2____________3____________4____________5____________6

*Täysin eri mieltä* *Täysin samaa mieltä*

Ymmärsin miten käytetty ruudukko tehtiin annetulla murtoluvulla

1____________2____________3____________4____________5____________6

*Täysin eri mieltä* *Täysin samaa mieltä*

Ymmärsin, miten murtoluvun saa muutettua desimaaliluvuksi opetetulla menetelmällä

1____________2____________3____________4____________5____________6

*Täysin eri mieltä* *Täysin samaa mieltä*

Tunnilla oli kivaa

1____________2____________3____________4____________5____________6

*Täysin eri mieltä* *Täysin samaa mieltä*

Mitä muuta palautetta haluaisit antaa?

## 7.3 Palautelomake opettajille

**Opettajan palautelomake**

Opetettavat aineet:

Kuinka kauan olet opettanut:

Miten tunti mielestäsi meni? Mitä mieltä olit käytetystä menetelmästä?

Suosittelisitko tunnilla käytetty menetelmää opetukseen? Miksi / miksi ei?

Vapaa sana ja palaute

## 7.4 Opetusmenetelmän ohjelmointiversion ohjeet scratch-ohjelmointia varten

**Ruudukkopeli:**

1. Ensimmäiseksi pitää luoda 10x? ruudukko, riippuen siitä, mikä tutkittavan murtoluvun jakaja on. Esimerkiksi murtoluvulle $\frac{2}{4}$ ruudukosta tulee 10x4 kokoinen siten, että 10 ruutua on vaakatasossa.

   - Ruudukko ei toimi taustakuvana, joten ruudukko tulee muodostaa 40 ruudusta. Miten saat ruudukon muodostettua?

     a) Määräämällä neliöiden aloituskohdat “mene kohtaan x: ? y: ?” palikalla sopivien etäisyyksien päähän siten, että saman rivin kaikilla neliöillä on sama y:n arvo ja saman sarakkeen neliöillä on aina sama x:n arvo. Seuraavan rivin y:n arvon etäisyys edelliseen riviin kannattaa testata.

2. Seuraavaksi luodaan ruudukossa siirtyvät hahmot ($\frac{2}{4}$ osaa tapauksessa kaiken kaikkiaan 20 hahmoa).

   - Siirrettävälle hahmolle kannattaa määrätä jälleen aloittaessa paikka. Noudata hahmon paikkaa määrätessä työohjeen systeemiä, eli $\frac{2}{4}$ osaa tapauksessa hahmot täyttävät 2 ylintä riviä.
   - Hahmo halutaan saada siirtymään klikattaessa järjestyksessä aina mahdollisuuden mukaan 1.sarakkeen ylimmästä ruudusta alimpaan, jne. ja hahmon halutaan siirtyvän seuraavaan vapaaseen ruutuun, mikäli ruudussa on jo jokin toinen hahmo. Miten tämän voi tehdä?

     a) Valitse hahmolle 1 ensin “Kun klikataan “vihreä lippu”” tapahtuma ja määritä “mene kohtaan…” liikkeellä hahmolle 1 aloituspaikka jonkun ruutu-hahmoista päälle. Valitse tapahtumista “kun tätä hahmoa klikataan” ja alle liikkeestä “mene Ruutu 1” (voit nimetä ruutusi, kuten haluat”).

     b) Valitse ohjauksesta “jos, niin” ja “jos” kohtaan toiminnoista vihreitä ”_ tai _”palikoita sisäkkäin. Määritä näiden avulla, että hahmo 1 ei mene ruutuun 1, mikäli ruudussa on mikä tahansa muu hahmo (tuntoaistista “koskettaako…” palikka hyödyllinen).

     c) Laita edellä tehdyn “jos, niin” palikan sisään seuraava “mene kohtaan…” ruutu ja valitse tähän seuraavaksi täytettävä ruutu ensimmäisestä sarakkeesta. “Mene” ruudun alle valitaan jälleen ohjauksesta “jos, niin” palikka, johon määritetään, ettei hahmo mene ruutuun 2, mikäli ruudussa on mikä tahansa muu hahmo.

     d) Tätä jatketaan niin kauan, kunnes hahmolle 1 on käyty kaikki mahdolliset ruutu vaihtoehdot läpi. Onko tarpeellista käydä läpi kaikki ruutuvaihtoehdot?

        - Ei, $\frac{2}{4}$ osaa tapauksessa riittää, että 5:n ensimmäisen sarakkeen ruutu vaihtoehdot käydään läpi.

e) Sama määräys tehdään jälleen hahmolle 2 kuin hahmolle 1, mutta “koskettaako hahmo2” nuolesta valitaan tilalle “hahmo1”. **Huomio:** Helpointa on kopioida hiiren oikealla näppäimellä hahmon 1 skripti ja siirtää se hahmolle 2. **Huomioi myös**, että hahmon 2 aloituspaikka tulee olla eri ruudussa, kuin hahmon 1. Sama tehdään kaikille siirreltäville hahmoille ja lopulta saadaan peli tehtyä.

3. Viimeisenä tehdään “kysyjä” hahmo, joka kysyy tutkittavan murtoluvun (esimerkin tapauksessa $\frac{2}{4}$ osaa) vastausta desimaalilukuna. Halutessa hahmosta voi tehdä vihaisen, mikäli vastaus on väärä. Määritä kysymystä kysyttävän siihen asti, että vastaus on oikea $(0, 5)$. Toteutus kysyjän tapauksessa on vapaa. Esimerkki toteutus:

   a) Valitse tapahtumista “kun klikataan “vihreä lippu””
   b) Valitse ulkonäöstä “vaihda asusteeksi ‘asusteen nimi’”
   c) Valitse ohjauksista “toista kunnes. . . ” toiminnoista ”_ = _”ja tähän tuntoaisteista “vastaus” ja toiseen kohtaan oikean vastauksen lukuarvo.
      - Valitse “toista kunnes. . . ” sisään tuntoaistista “Kysy. . . ’Mikä on ylläesitetyn murtoluvun oikea vastaus desimaalilukuna?’”
      - Valitse ohjauksesta “Jos . . . , niin, muuten” ja sama “vastaus = ?” kuin “toista kunnes . . . ” palikan sisällä on.
        1. “Jos, niin” palikan sisään valitaan ulkonäöstä “vaihda asusteeksi ‘voittaja’”
        2. “Muuten” kohdan sisään valitaan ulkonäöstä “vaihda asusteeksi ‘vihainen’”
   d) “Toista kunnes . . . ” palikan alle valitaan vielä ulkonäöstä “vaihda asusteeksi ‘voittaja’”, jonka alle ulkonäöstä “sano ‘Oikein!’”. Tämän jälkeen valitaan vielä ohjauksesta “odota ‘5’ sekuntia”, jonka jälkeen ohjauksesta valitaan palikka “pysäytä ‘kaikki’”.

**Murtolukujen muutto desimaaliluvuiksi -peli**

Pelin ideana on saada pelihahmo siirtymään pelialustan vasemmasta reunasta oikeaan pienin askelin sitä mukaa, kun pelaaja vastaa oikein murtoluvun desimaaliluvuksi muuttamiseen. Väärin vastatessa pelaaja puolestaan joutuu palaamaan taaksepäin.

Kysymyksiä voi tehdä niin paljon, kuin jaksaa. Kysymykset myös laittaa “ikuisesti” palikan sisään, jolloin samat kysymykset kiertävät niin kauan, että pelaaja pääsee maaliin.

Seuraavassa pelin tekemiselle tarkempi ohje. Pelissä hahmolle luodaan kolme asustetta: “normaali”, “oikein” ja “väärin” asusteet. Lisäksi tehdään kaksi taustaa: “pelitausta” ja “voittaja”.

1. Valitaan tapahtumista “kun klikataan ‘vihreä lippu’” ja kootaan peli tämän alle.
2. Valitaan ulkonäöstä “vaihda taustaksi ‘pelialusta’” ja “vaihda asusteeksi ‘normaali’”.
3. Valitaan liikkeestä “mene kohtaan x: -200, y: -10” (numeroarvot voivat olla myös eri).
4. Valitaan ohjauksista “ikuisesti” ja rakennetaan loppupeli tämän sisälle.
5. Valitse tuntoaistista “kysy ‘Paljon $\frac{2}{4}$ osaa on desimaalina?’ ja odota”.
6. Valitse ohjauksista “jos . . . , niin, muuten”
   a) “Jos” kohtaan valitaan toiminnoista “_ = _” ja tyhjiin kohtiin valitaan tuntoaistista “vastaus” ja toiseen kohtaan oikea vastaus: 0,5.
   b) “Jos ‘vastaus=0,5’, niin” palan sisään valitaan ulkonäöstä “vaihda asusteeksi ‘oikein’”, liikkeestä “muuta x:n arvoa ‘50’” ja ulkonäöstä “sano ‘Hyvä!’ 2 sekunnin ajan”
      * Valitaan “Jos ‘vastaus=0,5’, niin” sisään vielä ohjauksista “jos . . . , niin” pala:
        - “Jos” kohtaa toiminnoista “_ < _” ja tähän “210<x-sijainti of Pelaaja” (löytyy tuntoaistista).
        - Valitse palan sisään ulkonäöstä “vaihda taustaksi ‘voittaja’ ja ohjauksesta “pysäytä kaikki”.
   c) Valitse vielä “muuten” kohdan sisään ulkonäöstä “vaihda asusteeksi ‘väärin’” ja liikkeestä “muuta x:n arvoa ‘-50’”.
7. Kopioi kohtia 5 ja 6 “ikuisesti” palan sisään allekkain niin monta, kuin haluat tehdä kysymyksiä (10 eri kysymystä melko hyvä määrä”. Muista vaihtaa aina kysyttävä murtoluku, sekä “jos vastaus = ?, niin” oikeaksi jokaiseen blokkiin tapauskohtaisesti.